SCIENTIA PLENA **VOL. 5, NUM. 11** **2009**
www.scientiaplena.org.br

Correções quânticas à massa do kink deformado

Thiago R. Araujo & Stoian I. Zlatev

Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil

thiagorochaaraujo87@gmail.com

(Recebido em 01 de setembro de 2009; aceito em 01 de novembro de 2009)

Defeitos topológicos foram muito estudados nas ultimas décadas, sendo ainda objeto de bastante interesse em diversas áreas, como na física da matéria condensada, na física de partículas elementares e na cosmologia. Soluções do tipo kink em certos modelos de campos escalares num espaço-tempo de dimensão dois são exemplos típicos de defeitos topológicos. Partindo de um modelo com soluções clássicas desse tipo podemos encontrar uma infinidade de novos modelos com a mesma propriedade através de um procedimento de deformação [D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson, Phys. Rev. D66 (2002) 101701(R)]. Sugerimos nesse trabalho um método para o cálculo da variação da primeira correção quântica à massa do kink sob uma deformação pequena. Deformações infinitamente pequenas dos modelos Seno-Gordon e do ϕ_2^4 são analisadas em detalhes.

Palavras-chave: kink, deformação, correção à massa.

1. Introdução

Nas ultimas décadas os defeitos topológicos foram objetos de grande interesse em diversos campos da física [1]. Defeitos topológicos são usados na explicação de fenômenos de transição de fase em vários tipos de sistemas (Hélio superfluido, cristais líquidos, estruturas ferromagnéticas). Para a cosmologia, os modelos consideram que durante a sua expansão e conseqüente resfriamento, o universo sofreu severas transições de fases e, durante algumas delas defeitos topológicos podem ter sido formados, sendo interessante conhecer sua evolução e comportamento. O mecanismo no qual os defeitos topológicos são formados após transições de fases, é chamado mecanismo de Kibble.

A aplicação de defeitos topológicos em modelos de partículas elementares iniciou-se com os trabalhos de Skyrme. No modelo de Skyrme os solitons puderam ser interpretados como bárions.

Diferentes tipos de defeitos topológicos são possíveis, e sua formação dependerá das propriedades de simetria do sistema e da natureza da fase de transição. Esses defeitos dentre outros tipos podem ser: paredes de domínio, cordas cósmicas, monopólos e texturas.

Um dos exemplos mais simples de defeito topológico é o "kink" que ocorre em certos modelos com um campo escalar em um espaço-tempo de dimensão dois. O kink clássico é uma solução da equação de movimento clássica de tal modelo, caracterizada por uma densidade de energia localizada. O kink clássico ou, melhor, a família uniparamétrica de soluções, obtidas por meio de translações espaciais de um dado kink clássico, corresponde a um estado do kink quantizado.

Recentemente foi proposto um procedimento para deformação do kink [2], possibilitando uma aplicação dos defeitos topológicos em modelos cosmológicos. Embora esta aplicação necessite da teoria do kink desenvolvida em nível clássico, é interessante estudar as propriedades do kink quântico deformado, como também as condições sob os quais o kink quântico "deformado" existe. No presente trabalho apresentamos um método para o cálculo da variação da massa do kink quântico sob uma deformação.

2. O kink

2.1 Kink clássico

Consideremos um campo escalar ϕ em um espaço-tempo de dimensão dois. Supondo que o potencial U(ϕ) na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] - U(\phi) \tag{2.1}$$

tenha pelo menos dois mínimos $\phi_+ \neq \phi_-$ tal que

$$U(\phi_+) = U(\phi_-) = 0\,. \tag{2.2}$$

A equação de movimento

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + U'(\phi) = 0 \tag{2.3}$$

possui um solução[1] estática (independente do tempo) ϕ_{cl} tal que

$$\frac{d^2\phi_{cl}(x)}{dx^2} = U'(\phi_{cl}(x))\,, \tag{2.4}$$

e satisfaz as condições assintóticas

$$\phi_{cl} \to \phi_\pm \quad \text{quando} \quad x \to \pm\infty\,. \tag{2.5}$$

Sendo que essa equação pode assumir a forma seguinte (escolhendo condições de contorno apropriadas)

$$\left(\frac{d\phi_{cl}}{dx}\right)^2 = 2U(\phi_{cl})\,. \tag{2.6}$$

A energia da solução estática (a massa clássica do kink) será

$$M_{cl} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_{cl}}{dx}\right)^2 + U(\phi_{cl})\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\phi_{cl}}{dx}\right)^2 dx\,. \tag{2.7}$$

2.2 Quantização do kink

As soluções do tipo kink correspondem a estados do campo quantizado que podem ser interpretadas como estados de uma partícula. Na expansão semi-clássica (uma expansão em termos de $\hbar$) da massa (que será chamada de "kink quântico ou simplesmente "kink") é dado pela massa clássica (2.7) do kink e os outros termos são chamados correções quânticas à massa

[1] A simetria translacional da eq. (2.3), implica na existência de uma infinidade de soluções estáticas que satisfazem as condições assintóticas (2.5).

do kink. O cálculo da primeira correção quântica à massa do kink foi feita em 1974 por Dashen, Hasslacher e Neveu [3]. O desenvolvimento de técnicas variadas para as correções quânticas [4] foi motivada, em particular pela necessidade de estudar modelos que, além do campo escalar, contêm campos fermiônicos. No entanto, o método por Dashen, Hasslacher e Neveu [3], baseado na discretização por "contagem de modos", é aparentemente, mais conveniente no estudo das correções quânticas à massa do kink deformado. Por isso, apresentamos as principais características do método.

Considerando no presente trabalho apenas a primeira correção quântica, admitiremos que, além da eq. (2.2), vale também

$$U''(\phi_+) = U''(\phi_-)\,, \tag{2.8}$$

o que garante a consistência da teoria do kink em nível semi-clássico.

Os modos de oscilação do campo ao redor da configuração estática $\phi_{cl}(x)$ e as respectivas freqüências podemos obter substituindo na equação de movimento (2.3) o *ansatz*

$$\phi(x,t) = \phi_{cl}(x) + \psi(x)e^{i\omega t}\,, \tag{2.9}$$

e mantendo apenas os termos lineares em ψ. Isto nos conduz à equação

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_{cl}(x))\right]\psi(x) = \omega^2\psi(x)\,. \tag{2.10}$$

Os modos de oscilação ao redor de qualquer um dos vácuos clássicos $\phi_\pm$ e as respectivas frequências são determinadas pela equação

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_-)\right]\psi(x) = \omega^2\psi(x)\,. \tag{2.11}$$

Os espectros dos operadores

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_{cl}(x))\ ,\ H_- = -\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_-(x)) \tag{2.12}$$

tornam-se discretos quando H e H_- são considerados operadores definidos num espaço de funções periódicas [3]. Sejam ω_n e $\omega_n^{(0)}$ frequências de pequenas flutuações ao redor do kink e do vácuo clássico, correspondentemente. A energia do estado fundamental no setor do vácuo será dada pela soma das energias de ponto zero dos osciladores do campo,

$$E_{vac} = \frac{1}{2}\sum_n \omega_n^{(0)}\ .$$

Aparentemente, a energia do estado fundamental no setor do kink será dada pela soma

$$M_{cl} + \frac{1}{2}\sum_n \omega_n\ .$$

No entanto, um estudo detalhado mostra que a energia do estado fundamental no setor do kink contém mais um termo, que provem dos contratermos necessários para uma renormalização consistente do setor do vácuo do modelo [3,4]. Indiquemos este termo por "c.t.". Notamos que ele possui uma divergência logarítmica [4]. A energia do estado fundamental no setor do kink é dada pela expressão

$$E_{kink} = M_{cl} + \frac{1}{2}\sum_n \omega_n + c.t.,$$

e a massa do kink será dada pela diferença $E_{kink} - E_{vac}$, logo

$$M = M_{cl} + \frac{1}{2}\sum_n \omega_n - \frac{1}{2}\sum_n \omega_n^{(0)} + c.t.. \qquad (2.13)$$

Escrevendo

$$M = M_{cl} + \Delta M_1, \qquad (2.14)$$

em que ΔM_1 é a primeira correção quântica, obtemos, usando a equação (2.13)

$$\Delta M_1 = \frac{1}{2}\sum_n \omega_n - \frac{1}{2}\sum_n \omega_n^{(0)} + c.t.. \qquad (2.15)$$

2.3 Kink deformado

Foi introduzido recentemente [2] um procedimento para deformação de defeitos que permitiu a formação de redes de defeitos e aumentou significativamente o interesse para sua aplicação na teoria das branas. O procedimento se aplica a defeitos, topológicos ou não, que satisfazem a equação de Bogomol'nyi.

Seguindo o método geral descrito em [2], faremos uma deformação no modelo original (2.1), através de uma função $f(\chi)$ (tal que $f'(\chi)$ não se anula), pondo

$$\phi = f(\chi) \qquad (2.16)$$

e encontramos uma densidade lagrangiana

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2\right] - \tilde{U}(\chi), \qquad (2.17)$$

onde o potencial deformado é

$$\tilde{U}(\chi) = \frac{U(f(\chi))}{[f'(\chi)]^2}. \qquad (2.18)$$

Verifica-se facilmente que

$$\chi_{cl}(x) = f^{-1}(\phi_{cl}(x)) \qquad (2.19)$$

é uma solução do tipo kink do modelo deformado [2]. A partir dessa expressão, encontramos que a massa do kink clássico deformado é dada pela fórmula

$$\tilde{M}_{cl} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\chi_{cl}}{dx}\right)^2 + \tilde{U}(\chi_{cl})\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\chi_{cl}}{dx}\right)^2 dx\,, \tag{2.20}$$

onde podemos utilizar a eq. (2.19) para escrever a massa como

$$\tilde{M}_{cl} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left.\frac{df^{-1}}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_{cl}}\right)\left(\frac{d\phi_{cl}}{dx}\right)^2 dx\,. \tag{2.21}$$

3. O espectros das flutuações

3.1 O espectros continuo

Consideremos primeiro os espectros dos operadores H e H_-, definidos pelas equações (2.12) "na reta", ou seja, em um subconjunto denso do espaço de Hilbert de funções com quadrado de módulo integrável na reta. Os espectros contínuos desses operadores são iguais. Com efeito, decorre da eq. (2.5) que, qualquer que seja o valor do parâmetro real k, a equação

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_{cl}(x)) - U''(\phi_-(x))\right]\psi(x) = k^2\psi(x) \tag{3.1}$$

possui exatamente uma solução que satisfaz a condição

$$\psi_k(x) \to e^{ikx} \text{ quando } x \to -\infty\,.$$

A solução $\psi(x,k)$ é limitada. Com efeitos, segue das equações (2.5), (2.8) e (3.1) que

$$\psi_k(x) \to a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx} \text{ quando } x \to \infty\,,$$

onde a_k e b_k são constantes. Concluímos que ao espectro continuo pertencem os pontos do intervalo infinito $U''(\phi_-) < \omega^2$. É conveniente definir a função com valores positivos $\omega(k)$ através da equação

$$\omega^2(k) = U''(\phi_-) + k^2\,, \qquad -\infty < k < \infty\,. \tag{3.2}$$

Logo,

$$H\psi_k(x) = \omega^2(k)\psi_k(x)\,, \qquad -\infty < k < \infty\,.$$

O espectro contínuo é duplamente degenerado (exceto o "autovalor" $\omega^2(0) = U''(\phi_-)$).

Considerando o modelo deformado, mostraremos que a equação

$$\tilde{U}''(\chi_+) = \tilde{U}''(\chi_-)\,, \tag{3.3}$$

é válida, o que garante a existência do "setor do kink" pelo menos em nível semi-clássico. Além disso, mostraremos que

$$\tilde{U}''(\chi_-) = U''(\phi_-)\,, \tag{3.4}$$

o que significa que o espectro contínuo do operador das pequenas flutuações ao redor do kink deformado,

$$\tilde{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{U}''(\chi_{cl}(x))\,, \tag{3.5}$$

terá características idênticas às do espectro contínuo do operador H.

Com efeito, calculando a segunda derivada em relação a χ do potencial deformado (2.18), obtemos

$$\tilde{U}''(\chi) = U''(\phi) - 3U'(\phi)\frac{f''(\chi)}{[f'(\chi)]^2} + 6U(\phi)\frac{[f''(\chi)]^2}{[f'(\chi)]^4} - 2U(\phi)\frac{f'''(\chi)}{[f'(\chi)]^3}\,. \tag{3.6}$$

Usando as equações (3.6), (2.2), (2.8), (2.16) e a equação

$$U'(\phi_\pm) = 0$$

(essa última é válida porque em $\phi_\pm$ ocorrem valores mínimos do potencial U), verificamos as equações (3.3) e (3.4).

3.2 O espectro discreto

O espectro discreto do operador das pequenas flutuações ao redor do kink, tanto para o modelo original como para o deformado, é não negativo em conseqüência da estabilidade do kink clássico correspondente [4]. Como o kink clássico quebra a simetria translacional da ação, o número zero sempre pertence ao espectro discreto do operador das pequenas flutuações. Outros autovalores podem existir (como no modelo ϕ^4) ou não (como no modelo Seno-Gordon). Se existirem tais autovalores, eles pertencerão ao intervalo entre zero e a extremidade do espectro contínuo. Em relação ao comportamento do espectro discreto no processo da deformação do modelo, não podemos tirar conclusões tão completas quanto no caso do espectro contínuo. Evidentemente, o zero será sempre um autovalor e o modo zero será proporcional a derivada espacial do kink clássico [2]. No entanto, no momento não excluímos a possibilidade de autovalores não-nulos surgirem (ou sumirem) em um processo de deformação contínua do modelo original.

Admitimos, no entanto, que uma deformação infinitamente pequena não causa uma mudança no número de autovalores discretos e que somente as posições dos autovalores podem sofrer uma mudança nesse caso. Supondo uma função deformação tal que

$$f(\chi) = \chi + \varepsilon h(\chi)\,, \tag{3.7}$$

em que ε é um pequeno parâmetro e desconsiderando os termos de ordem em ε superior à primeira, na eq. (3.6) , obtemos

$$\tilde{U}''(\chi_{cl}) = U''(\phi_{cl}) - 3\varepsilon h''(\chi_{cl})U'(\phi_{cl}) - 2\varepsilon h'''(\chi_{cl})U(\phi_{cl})\,. \tag{3.8}$$

Logo

$$\tilde{H} = H + \varepsilon W\,, \tag{3.9}$$

em que W é o operador de multiplicação

$$W(x) = -3h''(\chi_{cl})U'(\phi_{cl}) - 2h'''(\chi_{cl})U(\phi_{cl}). \tag{3.10}$$

Tratando o termo εW no segundo membro da equação (3.9) como uma pequena perturbação, utilizaremos o método de teoria da perturbação independente do tempo, para o cálculo dos autovalores e dos modos excitados do operador $\tilde{H}$. A correção $\Delta\Omega_i^2$ de primeira ordem em ε para um dado autovalor Ω_i^2 do espectros discreto será dada por

$$\Delta\Omega_i^2 = \varepsilon\langle\Psi_i|W|\Psi_i\rangle, \tag{3.11}$$

em que $|\Psi_i\rangle$ é o autovetor normalizado associado ao autovalor Ω_i^2.

Mostremos que o modo zero escrito em função do campo como

$$\Psi_0(x) = (M_{cl})^{-\frac{1}{2}}\frac{d\phi_{cl}}{dx}, \tag{3.12}$$

terá seu valor inalterado. Com efeito, a correção de primeira ordem em ε ao autovalor é dada por

$$\Delta(\Omega_0^2) = -\frac{\varepsilon}{M_{cl}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\phi_{cl}}{dx}\right)^2\left[3h''(\phi_{cl})U'(\phi_{cl}) + 2h'''(\phi_{cl})U(\phi_{cl})\right]dx. \tag{3.13}$$

Fazendo a mudança de variável $\phi = \phi_{cl}(x)$ e usando a equação de Bogomol'nyi (2.6), encontramos

$$\Delta(\Omega_0^2) = -\frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{M_{cl}}\int_{\phi_-}^{\phi_+}\left(\frac{3}{2}U^{1/2}U'h'' + U^{3/2}h'''\right)d\phi = -\frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{M_{cl}}U^{3/2}h''\Big|_{\phi_-}^{\phi_+} = 0, \tag{3.14}$$

pois o potencial $U = U(\phi)$ anula-se em cada um dos vácuos clássicos $\phi_\pm$.

4. Correção quântica à massa do kink deformado

Seguindo Dashen, Hasslacher e Neveu [3], impomos condições de contorno periódicas no campo das flutuações ao redor do kink

$$\eta(x,t) = \phi(x,t) - \phi_{cl}(x), \tag{4.1}$$

pondo

$$\eta(\frac{L}{2},t) = \eta(-\frac{L}{2},t). \tag{4.2}$$

Impomos condições análogas no campo de flutuações ao redor do kink deformado e, também, às flutuações ao redor dos vácuos clássicos no modelo original e no modelo deformado. Os espectros das pequenas flutuações tornam-se discretos.

A primeira correção quântica é dada então, pelo limite da expressão

$$\Delta M_1 = \frac{1}{2}\sum_n \omega_n - \frac{1}{2}\sum_n \omega_n^{(0)} + \rho \,, \tag{4.3}$$

onde ω_n^2 e $[\omega_n^{(0)}]^2$ são os autovalores dos operadores H e H_- correspondentemente e denotamos os contratermos como ρ. De modo análogo, a primeira correção quântica à massa do kink deformado será dada pelo limite da expressão

$$\Delta\tilde{M}_1 = \frac{1}{2}\sum_n \tilde{\omega}_n - \frac{1}{2}\sum_n \tilde{\omega}_n^{(0)} + \tilde{\rho} \,, \tag{4.4}$$

onde $\tilde{\omega}_n^2$ e $[\tilde{\omega}_n^{(0)}]^2$ são os autovalores dos operadores $\tilde{H}$ e $\tilde{H}_-$, correspondentemente e $\tilde{\rho}$ provém dos contratermos do modelo deformado. Porém da equação (3.4) notamos que

$$\tilde{H}_- = H_- \,,$$

portanto a diferença $\Delta\tilde{M}_1 - \Delta M_1$ será dada pelo limite da expressão

$$\Delta\tilde{M}_1 - \Delta M_1 = \frac{1}{2}\sum_n \tilde{\omega}_n - \frac{1}{2}\sum_n \omega_n + \Delta\rho \,, \tag{4.5}$$

em que $\Delta\rho = \tilde{\rho} - \rho$.

Supondo uma deformação pequena, da forma (3.7) obtemos para o termo linear em ε na diferença $\Delta\tilde{M}_1 - \Delta M_1$ a expressão

$$\Delta M_1^{(1)} = \frac{1}{4}\sum_n \frac{\Delta(\omega_n^2)}{\omega_n} + \Delta\rho^{(1)} \,, \tag{4.6}$$

em que $\Delta\rho^{(1)}$ indica o termo linear em ε na diferença $\tilde{\rho} - \rho$ dos contratermos e $\Delta(\omega_n^2)$ é a parte linear em ε na diferença dos autovalores $\tilde{\omega}_n^2 - \omega_n^2$. Substituindo na eq. (4.6) o valor de $\Delta\left(\omega_n^2\right)$ fornecido pela teoria de perturbação

$$\Delta\left(\omega_n^2\right) = \varepsilon\left\langle \psi_n \middle| W \middle| \psi_n \right\rangle , \tag{4.7}$$

em que $\left|\psi_n\right\rangle$ é o autovetor normalizado associado ao autovalor ω_n^2, obtemos

$$\Delta M_1^{(1)} = \frac{\varepsilon}{4}\sum_n \frac{\left\langle \psi_n \middle| W \middle| \psi_n \right\rangle}{\omega_n} + \Delta\rho^{(1)} . \tag{4.8}$$

5. Exemplos

Para exemplificar o método descrito, consideremos deformações infinitamente pequenas de dois modelos bem escolhidos: o modelo Seno-Gordon e o modelo ϕ_2^4. Para estes modelos a equação das pequenas flutuações tem a forma de uma equação de Schrödinger com um potencial sem reflexão,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+m^2l^2-l(l+1)m^2\sec h^2(mx)\right]\psi(x)=\omega^2\psi(x), \qquad (5.1)$$

onde[2], para o modelo Seno-Gordon, $l=1$ e $l=2$ para o modelo ϕ_2^4. Para a equação (5.1) o modo zero é

$$\psi_0(x) = A_l\, \mathrm{sech}^l\, mx\,, \qquad (5.2)$$

onde A_l é uma constante de normalização.

5.1 Modelo Seno-Gordon

O potencial da forma [6]

$$U(\phi)=\frac{m^4}{g^2}\left[1-\cos\left(\frac{g}{m}\phi\right)\right] \qquad (5.3)$$

O sóliton (kink)

$$\phi_{cl}(x)=4\frac{m}{g}\tan^{-1}\exp(mx)$$

satisfaz

$$\lim_{x\to-\infty}\phi_{cl}(x)=0=\phi_- \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\phi_{cl}(x)=2\pi\frac{m}{g}=\phi_+ \,.$$

A equação que determina o espectro das pequenas flutuações ao redor do sóliton é

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+m^2-2m^2\,\mathrm{sech}^2\, mx\right]\psi(x)=\omega^2\psi(x)\,. \qquad (5.4)$$

O único autovalor do espectro discreto é o zero e o modo zero é dado por

$$\psi_0(x)=\sqrt{\frac{m}{2}}\,\mathrm{sech}\, mx\ . \qquad (5.5)$$

As autofunções associadas ao espectro contínuo

$$\psi(k,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{k^2}{m^2}+1\right)}}\left(\frac{k}{m}+i\tanh mx\right)e^{ikx}, \qquad -\infty<\mathrm{k}<\infty, \qquad (5.6)$$

[2] Para um tratamento detalhado desse tipo de equação ver [5].

satisfazem a eq. (5.4) com $\omega^2 = \omega^2(k) = m^2 + k^2$ e são normalizados de tal modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k,x)^* \psi(k',x)dx = \delta(k-k').$$

Como o modelo Seno-Gordon possui apenas um autovalor discreto, somente o espectro contínuo irá contribuir para o termo de primeira ordem em ε na primeira correção quântica à massa do kink deformado. Impostas condições periódicas às flutuações, o espectro torna-se discreto, sendo

$$\omega_n^2 = [\omega(k_n)]^2$$

os autovalores, onde os números de onda k_n satisfazem

$$Lk_n + \delta_s = 2n\pi \ , \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5.7}$$

e δ_s é o desvio na fase da onda transmitida através do poço de potencial.

Substituindo na expressão

$$\langle \psi_n | W | \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 W(x) dx$$

a identidade

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{1}{L}\left[1 - \frac{2m}{\omega_n^2}\psi_0^2(x)\right], \tag{5.8}$$

e levando em conta que, como provamos na seção anterior,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 W(x) dx = 0,$$

obtemos

$$\langle \psi_n | W | \psi_n \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} W(x) dx + o\left(\frac{1}{L}\right),$$

ou ainda,

$$\langle \psi_n | W | \psi_n \rangle = \frac{D}{L} + o\left(\frac{1}{L}\right), \tag{5.9}$$

em que

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) dx = -\int_0^{2\pi m/g} \frac{3h''U' + 2h'''U}{\sqrt{2U}} d\phi. \tag{5.10}$$

Substituindo a expressão (5.8) na eq. (4.8), obtemos

$$\Delta M_1^{(1)} = \frac{\varepsilon D}{4L}\sum_n \frac{1}{\omega_n} + \Delta\rho^{(1)} + o\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon D}{4L}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}}\left(\frac{L}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\frac{d\delta_s}{dk}\right).$$

Finalmente, tomando o limite $L \to \infty$, encontramos

$$\Delta M_1^{(1)} = \frac{\varepsilon D}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}} + \Delta\rho^{(1)}. \tag{5.11}$$

5.2 Modelo ϕ_2^4

O potencial do modelo é dado por

$$U(\phi) = \frac{m^4}{2g^2}\left[1-\frac{g^2\phi^2}{m^2}\right]^2. \tag{5.12}$$

A solução estática

$$\phi_{cl}(x) = \frac{m}{g}\tanh(mx) \tag{5.13}$$

da equação de movimento é um kink que satisfaz as condições

$$\lim_{x\to-\infty}\phi_{cl}(x) = -\frac{m}{g} = \phi_- \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\phi_{cl}(x) = \frac{m}{g} = \phi_+ .$$

A equação de Schrödinger é escrita como

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 4m^2 - 6m^2\,\mathrm{sech}^2\, mx\right]\psi(x) = \omega^2\psi(x). \tag{5.14}$$

O modo zero é

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{3m}{4}}\,\mathrm{sech}^2\, mx. \tag{5.15}$$

No espectro discreto desse modelo existe mais um autovalor, $\Omega_1^2 = 3m^2$. A autofunção associada

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{3m}{2}}\,\mathrm{sech}\, mx \tanh mx \tag{5.16}$$

pode ser expressa em termos da solução $\phi_{cl}(x)$,

$$\psi_1(x)=\sqrt{\frac{3g^2}{2m}}\left[\phi_{cl}(x)\sqrt{1-\frac{g^2}{m^2}\phi_{cl}^2(x)}\right]. \tag{5.17}$$

A autofunção normalizada associada ao autovalor

$$\omega^2(k)=k^2+4m^2$$

do espectro contínuo, é dada por

$$\psi(k,x)=\frac{\left(1+\frac{k^2}{m^2}+\frac{3ik}{m}\tanh mx-3\tanh^2 mx\right)e^{ikx}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{k^4}{m^4}+5\frac{k^2}{m^2}+4\right)}}. \tag{5.18}$$

Utilizando o procedimento de regularização e contagem dos modos, discretizamos o espectro contínuo e encontramos a autofunção normalizada

$$\psi_n(x)=\frac{\left(1+\frac{k_n^2}{m^2}+\frac{3ik_n}{m}\tanh mx-3\tanh^2 mx\right)e^{ik_nx}}{\sqrt{L\left(\frac{k_n^4}{m^4}+5\frac{k_n^2}{m^2}+4\right)}}, \tag{5.19}$$

onde o número de onda k_n satisfaz a relação

$$Lk_n+\delta_\phi=2n\pi\ , \tag{5.20}$$

sendo δ_ϕ o desvio na fase da onda transmitida.

Calculando inicialmente a correção para o autovalor $\Omega_1^2=3m^2$ do espectro discreto, obtemos

$$\Delta\Omega_1^2=-\varepsilon\frac{3g^2}{2m}\int_{-m/g}^{m/g}\phi^2\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)\left[6g\phi h''+\frac{m^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)h'''\right]d\phi\,. \tag{5.21}$$

Portanto, a contribuição da espectro discreto para a correção será

$$\frac{1}{4}\frac{\Delta\left(\Omega_1^2\right)}{\Omega_1}=-\frac{\sqrt{3}g^2\varepsilon}{8m^2}\int_{-m/g}^{m/g}\phi^2\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)\left[6g\phi h''+\frac{m^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)h'''\right]d\phi\,. \tag{5.22}$$

Considerando a contribuição do espectro contínuo, utilizando as equações (5.18) e (5.12) para obter

$$\left|\psi_n(x)\right|^2 = \frac{\left(1+\frac{k_n^2}{m^2}\right)^2 + 3\left(\frac{k_n^2}{m^2}-2\right)\frac{g^2}{m^2}\phi^2 + 9\frac{g^4}{m^4}\phi^4}{L\left(\frac{k_n^4}{m^4}+5\frac{k_n^2}{m^2}+4\right)}. \tag{5.23}$$

A correção $\Delta\left(\omega_n^2\right)$ ao autovalor $\omega_n^2 = k_n^2 + 4m^2$ é

$$\Delta\left(\omega_n^2\right) = -\frac{\varepsilon}{L}\int_{-m/g}^{m/g} \frac{\left(1+\frac{k_n^2}{m^2}\right)^2 + 3\left(\frac{k_n^2}{m^2}-2\right)\frac{g^2}{m^2}\phi^2 + 9\frac{g^4}{m^4}\phi^4}{\left(\frac{k_n^4}{m^4}+5\frac{k_n^2}{m^2}+4\right)}\left[6g\phi h'' + \frac{m^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)h'''\right]d\phi. \tag{5.24}$$

Aplicando a técnica usada no exemplo anterior, encontramos que a contribuição de ordem ε na primeira correção quântica à massa do kink deformado será dada por

$$\begin{aligned}\Delta M_1^{(1)} = &-\frac{\varepsilon g^2\sqrt{3}}{8m^2}\int_{-m/g}^{m/g} d\phi\,\phi^2\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)\left[6g\phi h'' + \frac{m^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)h'''\right] \\ &-\frac{\varepsilon}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{\sqrt{k^2+4m^2}}\int_{-m/g}^{m/g} d\phi\,\frac{\left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)^2 + 3\left(\frac{k^2}{m^2}-2\right)\frac{g^2}{m^2}\phi^2 + 9\frac{g^4}{m^4}\phi^4}{\left(\frac{k^4}{m^4}+5\frac{k^2}{m^2}+4\right)}. \\ &\times\left[6g\phi h'' + \frac{m^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)h'''\right] + \Delta\rho^{(1)}\end{aligned} \tag{5.25}$$

A parte divergente na contribuição do espectro contínuo é dada por

$$J = -\frac{\varepsilon F}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{\sqrt{k^2+4m^2}}, \tag{5.26}$$

onde

$$F = \int_{-mg}^{m/g} d\phi\left[6g\phi h'' + \frac{m^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{m^2}\phi^2\right)h'''\right]. \tag{5.27}$$

6. Conclusões

Mostramos que o kink deformado é consistente em nível semiclássico. Na variação da massa do kink sob uma deformação pequena a contribuição das flutuações do espectro contínuo é divergente. A divergência é fraca (logarítmica). Uma analise do cancelamento dessa divergência com termos divergentes provenientes dos contratermos exige um estudo detalhado da renormalização do modelo deformado.

1. VILEKIN A.; SHELLARD E.P.S. Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge University Press, 1994.
2. BAZEIA D.; LOSANO L.; MALBOUISSON J.M.C . Deformed Defects. Physical Review D, 66:101701(R), 2002.
3. DASHEN R.; HASSLACHER B.; NEVEU A. Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory: II. Two-dimensional models and extended hadrons. Physical Review D, 10:4130,1974.
4. RAJARAMAN R. Solitons and Instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company, 1982
5. JAFFE R.L. An algebraic approach to reflectionless potentials in one dimension. Unpublished, 2009.
6. JACKIW R. Quantum meaning of classical field theory. Reviews of Modern Physics, 49:681-706, 1977.