



Verificação de um algoritmo de otimização topológica com não linearidade geométrica

Verification of a topology optimization algorithm with geometric nonlinearity

R. R. Amaral^{1*}; R. C. U. Rossi¹; L. F. Barazzutti¹; L. A. Isoldi²; H. M. Gomes¹

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 90040-001, Porto Alegre, RS, Brasil

²Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, 96203-900, Rio Grande, RS, Brasil

*rodrigo_amaral_23@hotmail.com

(Recebido em 09 de março de 2023; aceito em 15 de setembro de 2023)

O projeto de estruturas otimizadas está se tornando cada vez mais importante devido à escassez de recursos, competições tecnológicas e questões de proteção ambiental. Ao considerar vários casos de carga e materiais, a otimização estrutural busca produzir um projeto que seja econômico e seguro. A otimização topológica se tornou bastante difundida entre as engenharias e atualmente é aplicada em muitos campos de pesquisa. A maioria dos estudos de otimização topológica são realizados sob as premissas do comportamento elástico linear, que idealiza o material e impõe o equilíbrio em relação à configuração de referência (não deformada) da estrutura. No entanto, as suposições de linearidade são muito restritivas para problemas avançados. Neste contexto, este trabalho irá verificar um algoritmo baseado no método de otimização topológica com não linearidade geométrica para problemas em estado plano de tensão. O código proposto foi desenvolvido no software MATLAB. A verificação do código com não linearidade geométrica ocorre a partir da replicação do caso de uma viga em balanço carregada na extremidade. O processo de otimização com não linearidade, ao contrário da otimização topológica linear, deve apresentar dependência da magnitude da carga. Os resultados obtidos demonstram uma boa estabilidade durante o processo iterativo e topologias assimétricas são geradas.

Palavras-chave: não linearidade geométrica, topologia assimétrica, otimização estrutural.

The design of optimized structures is becoming increasingly important due to resource scarcity, technological competition and environmental protection issues. By considering various load cases and materials, structural optimization seeks to produce a design that is both economical and safe. Topology optimization has become quite widespread among engineering and is currently applied in many research fields. Most topological optimization studies are carried out under the assumptions of linear elastic behavior, which idealizes the material and imposes equilibrium in relation to the (non-deformed) reference configuration of the structure. However, linearity assumptions are too restrictive for advanced problems. In this context, this work will verify an algorithm based on the topology optimization method with geometric nonlinearity for plane stress problems. The proposed code was developed in MATLAB software. The verification of the code with geometric nonlinearity occurs from the replication of the case of a cantilever beam loaded at the end. The optimization process with non-linearity, in contrast to linear topological optimization, must be dependent on the magnitude of the load. The results obtained demonstrate good stability during the iterative process and asymmetric topologies are generated.

Keywords: geometric nonlinearity, asymmetric topology, structural optimization.

1. INTRODUÇÃO

Projetar elementos ou sistemas estruturais é um processo de encontrar uma solução para um problema com todas as restrições e requisitos presentes nele. Geralmente, há mais de uma solução. Especificamente, um projeto será limitado a uma ou mais soluções, dependendo dos critérios adotados. Por exemplo, os critérios podem estar relacionados à forma estrutural, características do material, facilidade de fabricação e montagem, demanda por peças padronizadas ou desempenho mecânico específico envolvendo aerodinâmica, transferência de calor, resistência ao desgaste, etc. Em princípio, o projetista quer otimizar alguns fatores de mérito comuns a todos esses citados [1].

Algoritmos para resolver problemas de otimização tendem a ser iterativos. Durante este processo, o algoritmo procura minimizar ou maximizar uma função objetivo escolhendo sistematicamente os valores das variáveis dentro de um conjunto viável. Algoritmos diferentes podem ter eficiência e requisitos diferentes. Não existe um único método disponível para resolver todos os problemas de otimização de forma eficiente [2, 3].

Por muitos anos, engenheiros mecânicos e civis [4-7] utilizam a otimização topológica para minimizar a quantidade de material e a energia de deformação das estruturas. A otimização topológica é um método computacional que ao satisfazer restrições de projeto e ao minimizar uma determinada função de custo, pode otimizar a distribuição de material dentro de uma região específica [8].

Assim, entende-se que a otimização topológica é um processo computacional no qual uma superfície ou volume de uma estrutura, submetida a carregamentos e condições de contorno, é dividida em um número finito de pequenas áreas ou volumes denominados elementos finitos. No início do processo de otimização, todos os elementos finitos do domínio computacional recebem a mesma densidade. Neste processo, as densidades são distribuídas de acordo com os objetivos pré-estabelecidos, como maximizar a rigidez ou a resistência estrutural sem desconsiderar as propriedades mecânicas do material. Desta forma, o material subutilizado (com baixa tensão ou alta flexibilidade ou *compliance*) é gradualmente removido ou redistribuído pelo domínio computacional. Formando, no final, uma nova topologia [6, 7].

Gea e Luo (2001) [9] é um dos primeiros artigos que considerou a não linearidade durante o processo de otimização topológica. Neste artigo, o problema de otimização foi investigado para estruturas com não linearidade geométrica. O problema de otimização foi resolvido iterativamente por um método de aproximação convexa sequencial. Os resultados numéricos demonstraram que ao considerar a não linearidade, as topologias são mais rígidas do que aquelas obtidas por um processo de otimização linear. Além disso, foi evidenciado que para estruturas que sofrem com grandes rotações ou deslocamentos, o processo de otimização linear pode gerar uma topologia que talvez não atenda às restrições de projeto quanto ao comportamento mecânico.

Um novo método para otimização topológica de mecanismos flexíveis usando o método de Galerkin foi apresentado por Du et al. (2008) [10]. Com o método de Galerkin, a discretização do domínio computacional foi feita por nós. Com isso, a distorção da malha foi eliminada, ou seja, a dificuldade de convergência relacionada com problemas geometricamente não lineares foi evitada. Além disso, foi utilizado o método do Material Isotrópico Sólido com Penalização para representar a dependência não-linear entre as propriedades do material com as densidades. Os resultados demonstraram que a construção de mecanismos flexíveis usando análise geométrica não-linear ao longo do processo de otimização pode produzir uma estrutura mais rígida do que aquelas obtidas por abordagens lineares. Resultados similares também são demonstrados por Bruns e Tortorelli (2001) [11].

Lee e Park (2015) [12] desenvolveram um novo método para otimização topológica para problemas sujeitos a carregamentos dinâmicos não lineares. O método de cargas estáticas equivalentes foi empregado para gerar o mesmo campo de resposta da análise estática linear em cada passo de tempo. O processo prossegue ciclicamente até que o critério de convergência seja satisfeito. Resultados indicaram que os elementos finitos com baixa densidade podem causar distorção na malha durante a análise dinâmica não linear. Para evitar isso, uma adaptação na função objetivo foi proposta. A ideia consistiu em minimizar a flexibilidade (*compliance*) próxima aos pontos de pico para evitar uma grande deformação em um determinado passo de tempo.

Nesse contexto, uma verificação de um código desenvolvido no software MATLAB para otimização topológica com não linearidade geométrica baseada na metodologia Otimização Estrutural Evolutiva Bidirecional é proposta no presente trabalho. A ideia será avaliar resultados *benchmark* retirados da literatura, comparando-os com aqueles obtidos no código desenvolvido. O processo de otimização com não linearidade deve apresentar dependência da magnitude da carga, ou seja, a carga máxima de projeto tem impacto significativo no processo de otimização para estruturas sujeitas a grandes rotações, deslocamentos ou deformações. Como resultado, espera-se que topologias menos simétricas sejam obtidas à medida que a carga considerada para a estrutura aumente durante as simulações.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Otimização topológica com não linearidade para estruturas contínuas

A maioria das pesquisas de otimização estrutural se concentra na criação de estruturas com pequenas deformações e adotam a Lei de Hooke para representar o material em regime linear. É difícil aplicar métodos de otimização em situações onde a não linearidade de material (como por exemplo, a fissuração do concreto) ou geométrica (grandes rotações, deslocamentos ou deformações) estão envolvidas. A otimização topológica de estruturas não lineares requer mais tempo computacional do que o requerido para uma análise linear. A eficiência computacional, para tais situações, é considerada um caso crítico, especialmente para análises tridimensionais [13].

Assim, a função objetivo não-linear para a minimização da *compliance* com restrição de volume (a função objetivo mais comum para processos de otimização topológica) pode ser descrita como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Ache } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)^T \\
 & \text{Minimize } \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N x_e^p u_e^T k_e u_e = \frac{1}{2} (\mathbf{f}^{ext})^T \mathbf{u} \\
 & \text{Sujeito à } \begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} = 0 \\ V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x_i v_i = V_{alvo} \\ x_i = x_{min} \text{ ou } 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

onde \mathbf{x} é o vetor das variáveis de projeto a serem otimizadas, \mathbf{C} denota a *compliance*, \mathbf{u} é o vetor global dos deslocamentos, \mathbf{K} é a matriz global de rigidez, u_e e k_e representam, respectivamente, o vetor de deslocamento (um subvetor do vetor global \mathbf{u}) e a rigidez de cada elemento finito (submatriz da matriz global \mathbf{K}), $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ é definido como o resíduo de cada equação de equilíbrio, \mathbf{f}^{int} e \mathbf{f}^{ext} representam os vetores de força interna e externa, respectivamente, e x_{min} , N , p e v_i representam as densidades relativas mínimas (diferentes de zero para evitar singularidade), o número de elementos usados para discretizar o domínio de projeto, o fator de penalização (número expoente, não confundir com a operação de transposição, T) e o volume do i -ésimo elemento finito, respectivamente. Finalmente, $V(\mathbf{x})$ e V_{alvo} são a fração de volume total e a fração de volume a ser atingida pelo algoritmo (definida pelo projetista), respectivamente.

De acordo com Han *et al.* (2022) [14] a única diferença entre um processo de otimização topológica com não linearidade em relação a um processo linear padrão é que a condição de equilíbrio $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = 0$ deve ser assegurada usando um esquema iterativo para obter o campo de deslocamento \mathbf{u} .

No que diz respeito aos critérios de convergência adotados durante a análise não-linear de elementos finitos, pode-se utilizar uma medida de comprimento de passo para verificar se a análise convergiu. Este critério pode ser feito pela análise da equação de equilíbrio (resíduo de forças), baseado em normas relativas ao deslocamento total ou incremental em relação ao deslocamento atual, ou variação relativa da energia de deformação ao longo das iterações. O critério baseado em resíduos, que utiliza uma abordagem incremental baseada em força, é o mais confiável deles, pois avalia continuamente se a equação de equilíbrio já foi alcançada dentro de uma certa tolerância. Além disso, para fornecer soluções precisas e acessíveis, a tolerância deve ser cuidadosamente escolhida. Para fazer isso, o engenheiro deve ter um conhecimento *a priori* de como o material se comporta para determinar qual tamanho de passo é necessário para traçar todo o caminho de equilíbrio (com pequenos incrementos) ou escolher um comprimento de passo maior se a carga de falha não for crucial para a análise (no caso deste artigo, um único incremento é adotado juntamente com o critério das normas relativas do deslocamento total).

A respeito do desenvolvimento da análise de sensibilidade, dois pontos importantes precisam ser discutidos: (i) a variação de energia deformacional da estrutura para quando um determinado elemento finito é removido ou adicionado no domínio computacional; e (ii) o esquema de interpolação das densidades dos elementos finitos. A análise de sensibilidade é definida com base no volume total do material a ser removido ou adicionado para cada iteração até que o algoritmo atinja o volume final fornecido. No presente estudo, um modelo de densidade para o módulo de elasticidade do material é utilizado $E(x_{ij}) = x_i^p E$, onde x_i é a densidade do material para o i -ésimo elemento finito, ao longo do processo assumirá valor de x_{min} (vazio) ou 1 (sólido).

O modelo de densidade é penalizado para garantir que as densidades fiquem próximas de x_{min} (vazios) ou de 1 (material). De acordo com Li *et al.* (1999) [15], há equivalência nas topologias otimizadas quando utilizado como sensibilidade durante o processo de otimização o critério de máxima tensão ou o critério de mínima *compliance*, definidos, respectivamente, como:

$$\alpha_i^e = \frac{(\sigma_i)^q v_i}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^q v_i} \quad (2)$$

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i}{V_i} \quad (3)$$

O volume total de material a ser removido do domínio computacional em cada iteração é dado por $v_{i+1} = v_i(1 \pm ER)$, onde ER é uma taxa evolutiva (porcentagem de material que será removido ou adicionado para cada iteração). O sinal vai depender do critério de sensibilidade adotado, por exemplo, para casos com restrição de volume de material: “-” será utilizado até o algoritmo atingir o V_{alvo} fornecido pelo projetista e, caso a remoção de material ultrapasse esse valor, ou seja, ocorra a violação da restrição de volume, o algoritmo passará a adicionar material no domínio computacional “+” até o volume final da estrutura ser igual ao V_{alvo} . Na sequência, o algoritmo distribui a quantidade de material V_{i+1} aos elementos finitos com base na sensibilidade α_i^e .

De acordo com Huang e Xie (2010) [13], há outras restrições que também podem ser consideradas durante o processo de otimização, como por exemplo, restrição de tensão, deslocamento, frequências, etc. A restrição de tensão implica que a tensão não exceda o limite de resistência em nenhum elemento do domínio computacional. Com isso, há um controle rígido sobre os níveis de tensão devido à função máxima ([16]).

Além disso, é comum usar filtros de sensibilidade para evitar bordas no processo de otimização topológica e outros fenômenos como *checkboard* e dependência de malha. Um filtro linear simples é usado neste trabalho e pode ser definido por:

$$\alpha_i^{Nodes} = \frac{\sum_{j=1}^k \omega(r_{ij}) \alpha_i^e}{\sum_{j=1}^k \omega(r_{ij})} \quad (4)$$

onde k é o número de nós que são vizinhos (a uma distância menor ou igual a r_{min}) do elemento finito i , r_{ij} é a distância entre o centro do elemento finito i até o nó j , $\omega(r_{ij})$ são fatores de ponderação lineares $\omega(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij}$ para $dist(i, j) < r_{min}$ e $\omega_{ij} = 0$ ou $dist(i, j) \geq r_{min}$ e α_j^{nodes} é a sensibilidade dos nós dentro do raio de vizinhança r_{min} com centro no elemento finito i .

Ainda, a Equação (4) é baseada na sensibilidade obtida de cada elemento finito, isto é, obtém-se valores suavizados em função dos elementos vizinhos. A estrutura final otimizada apresentará elementos internos com um formato bastante similar ao de uma treliça com seções transversais de tamanho dependentes do r_{min} e da fração de volume definida pelo usuário $V(x)$ [16].

Por fim, a otimização é realizada em um processo iterativo, que é interrompido quando os valores da *compliance* convergem para um valor estável, ou seja, é definido um critério de convergência, expresso por:

$$Error(C) = \frac{|\sum_{i=1}^L C_{k-i+1} - C_{k-L-i+1}|}{\sum_{i=1}^L C_{k-i+1}} < \Theta \quad (5)$$

onde k é o número da iteração atual, Θ é uma tolerância de convergência permitida (geralmente 0,001) e L é um número inteiro que representa o número de iterações anteriores consideradas na avaliação do erro (geralmente 10).

Por fim, caso o leitor tenha interesse e queira entender mais sobre a aplicabilidade e funcionamento do processo de otimização topológica na análise estrutural, alguns códigos disponíveis podem ser encontrados em Chandrasekhar e Suresh (2021) [17], Picelli et al. (2021) [18], Gao et al. (2021) [19], Ferrari e Sigmund (2020) [20] e Wang et al. (2023) [21].

2.2 Cálculo da Matriz de Rigidez Tangente Não-Linear Geométrica

Para o cálculo da matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^L + \mathbf{K}^\sigma$), utilizou-se o procedimento indicado em Kim (2014) [22] e Bonet e Wood (2008) [23], onde a matriz é calculada separadamente em três partes e posteriormente adicionadas. A matriz de rigidez elástica linear tradicional do elemento fica definida como:

$$\mathbf{K}^0 = \int_{v^e} \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dv \quad (6)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva para estado plano de tensões e \mathbf{B}_0 é a matriz que relaciona deslocamentos nodais e deformações ($\{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \mathbf{U}^e$), e que contém derivadas das funções de forma (\mathbf{N}). A parcela da matriz de rigidez de deformação linear \mathbf{K}^L , é dada por:

$$\mathbf{K}^L = \int_{v^e} (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L) dv \quad (7)$$

onde $\mathbf{B}_L = \mathbf{A} \mathbf{G}$ é a matriz de deformação linear da formulação Lagrangeana total, sendo \mathbf{A} a matriz com as derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas cartesianas, e \mathbf{G} a matriz que contém as derivadas das funções de forma com respeito às coordenadas cartesianas.

Para a matriz inicial de tensão \mathbf{K}^σ , a formulação é definida por:

$$\mathbf{K}^\sigma = \int_{v^e} \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} dv \quad (8)$$

sendo \mathbf{M} a matriz que contém o estado de tensões iniciais (Piola-Kirchhoff) arranjado de forma conveniente para as multiplicações matriciais.

Pela formulação de elementos finitos adotada para representar a não linearidade geométrica, os efeitos não lineares típicos provocados por efeitos de grandes deformações ou deflexões são amplificados pela matriz de rigidez de tensão tangente \mathbf{K}^σ . Os componentes de \mathbf{K}^σ são calculados com base no estado de tensão da iteração de equilíbrio anterior. Como resultado, normalmente são necessárias pelo menos duas iterações para gerar um problema de tensão rígida válido, porque a primeira iteração é usada para determinar o estado de tensão que será utilizado para gerar o \mathbf{K}^σ da segunda iteração. Além disso, um maior número de iterações pode ser necessário para que a solução convirja se a rigidez adicionada tiver impacto nos níveis de tensão do problema.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A verificação do código de otimização topológica com não linearidade geométrica, desenvolvido no software MATLAB, ocorre a partir da replicação do caso de uma viga em balanço com uma carga vertical aplicada na extremidade da estrutura, conforme pode ser observado na Figura 1. A estrutura otimizada foi inicialmente proposta por Buhl et al. (2000) [24] e, posteriormente, replicada por Huang e Xie (2010) [13]. O processo de otimização com não linearidade, ao contrário da otimização topológica linear, deve apresentar dependência da magnitude da carga, ou seja, a carga máxima de projeto deverá ter impacto significativo nas topologias que são propensas a grandes deslocamentos ou deformações. Como resultado, espera-se que topologias menos simétricas sejam obtidas à medida que a carga de projeto considerada para a estrutura ao longo das simulações aumente [25].

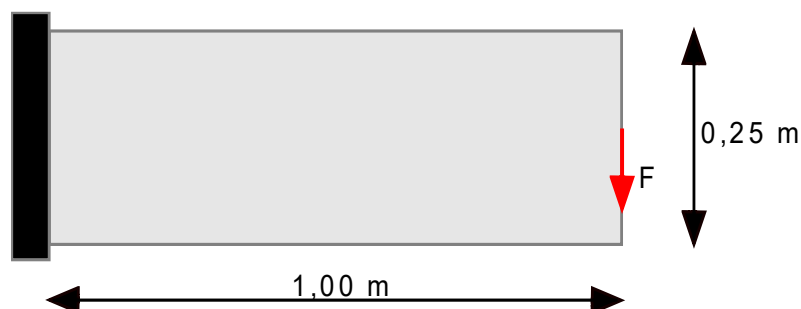








Figura 1. Geometria da viga em balanço com carregamento transversal na extremidade (adaptado de Buhl et al. (2000) [24]).

A viga em balanço apresenta um comprimento de 1,00 m com uma largura de 0,25 m e uma espessura de 0,10 m. Em relação às propriedades do material, foi utilizado um nylon com módulo de elasticidade de 3 GPa e um coeficiente de Poisson de 0,4. Para as simulações foi utilizado um elemento finito quadrilátero isoparamétrico com 2 graus de liberdade em cada nó e com um tamanho de 0,0020 m para discretizar o domínio computacional, ou seja, foram utilizados 62500 elementos finitos ($N_x = 500$ elementos e $N_y = 125$ elementos). Ademais, foi utilizada uma restrição de volume de 50% do domínio de projeto com os seguintes parâmetros para o processo de otimização: uma taxa evolutiva $ER = 1\%$, isto é, para cada iteração, 1 % de material será removido do domínio computacional; e um tamanho de raio de filtro $r_{min} = 0,02$ m (ou 10 elementos finitos para a malha discretizada utilizada).

Para exemplificar como a não linearidade geométrica afeta a otimização (a influência do carregamento sob as topologias), a primeira simulação considerou um carregamento de 60 kN e a segunda utilizou um carregamento de 144 kN. Os resultados obtidos quanto à *compliance* da estrutura otimizada são comparados aos obtidos por Buhl et al. (2000) [24] e Huang e Xie (2010) [13]. Os resultados comparados com a literatura são apresentados nas Tabelas 1 e 2. A Figura 2 apresenta o histórico evolutivo da *compliance* média e da variação da fração volumétrica das topologias.

Tabela 1. Comparativo das topologias com 50% de material retido (dois casos de carregamento) no domínio computacional quando empregado a não linearidade geométrica durante o processo de otimização topológico.

	60 kN	144 kN
Buhl et al. (2000)	 (a)	 (b)
Huang e Xie (2010)	 (c)	 (d)
Presente estudo	 (e)	 (f)

Durante o processo iterativo, percebeu-se que as topologias obtidas chegaram a geometrias muito próximas aos casos (c) e (d) da Tabela 1. Entretanto, durante a etapa de convergência e estabilização da *compliance* (Equação (5)), notou-se que a topologia começou a apresentar uma variação em seu formato. Gerando, no final, uma estrutura mais rígida do que aquelas obtidas na literatura.

Tabela 2. Comparação do trabalho complementar W^C (em kJ) para as topologias com não linearidade geométrica.

Carga máxima de projeto	Buhl et al. (2000) [24]	Huang e Xie (2010) [13]	Presente estudo
60 kN	2,331	2,171	2,093
144 kN	13,29	12,38	10,653

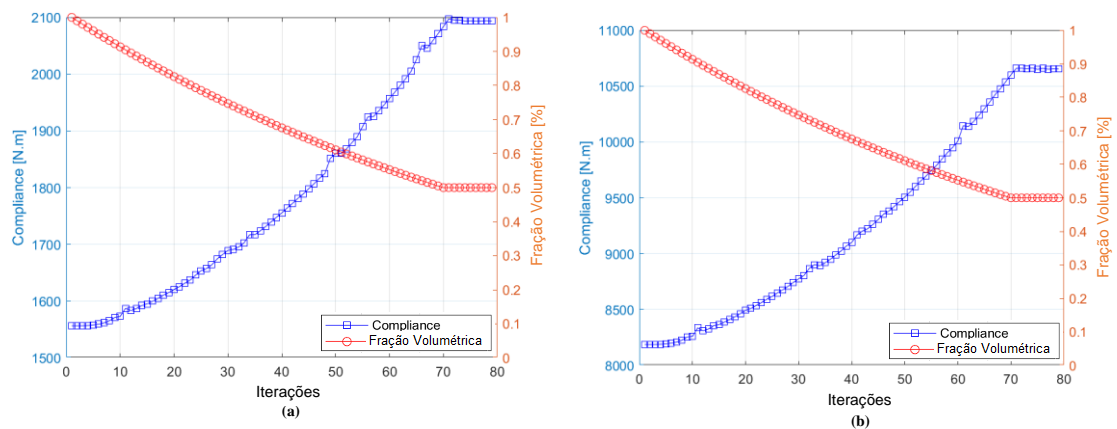


Figura 2. Histórico evolutivo da compliance média e fração volumétrica de um caso de uma viga em balanço com um carregamento na extremidade de (a) 60 kN e (b) 144 kN.

À medida que o material é iterativamente retirado do domínio computacional, como visto na Figura 2, a *compliance* aumenta, resultando na topologia da estrutura mostrada nos casos (e) e (f) da Tabela 1. Os "saltos" que ocorrem na *compliance* perto da 10^a iteração e na faixa de 30 a 40 e 60 a 70 iterações (ver Figura 2) são devidos a uma mudança significativa dentro da topologia, isto é, há uma eliminação completa de alguma barra interna na estrutura otimizada. Esse comportamento também é relatado por Huang e Xie (2010) [13] ao desenvolver uma otimização topológica linear e, em um segundo momento, não linear. Além disso, observa-se que o valor final de *compliance* para ambas as topologias simuladas com cargas de 60 kN e 144 kN convergem com 79 iterações e chegam a um resultado muito próximo da literatura (ver Tabelas 1 e 2).

4. CONCLUSÃO

Este trabalho trouxe a implementação da formulação de não linearidade geométrica para problema de otimização topológica de estruturas em estado plano de tensão. Foi revisada a teoria básica para implementação da formulação no contexto de elementos finitos. Um exemplo previamente investigado por Buhl et al. (2000) [24] e Huang e Xie (2010) [13] foi utilizado para comparar as topologias finais obtidas considerando a não linearidade geométrica. Os resultados trouxeram melhorias no valor final da *compliance* na implementação feita em comparação com os resultados da literatura.

O efeito da magnitude da carga nas topologias finais, para uma mesma fração volumétrica, foi verificado; como se esperava, gerando topologias finais que são assimétricas e dependentes da carga aplicada. Tem-se como sugestões para trabalhos futuros a implementação da não linearidade de material, expansão do código para otimização topológica para casos com múltiplos materiais (concreto armado) e outros algoritmos de análise não-linear como controle de forças, controle de deslocamentos ou controle generalizado de deslocamentos.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES e FAPERGS pelo apoio financeiro.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Rees DWA. Mechanics of optimal structural design: Minimum weight structures. Local de publicação: John Wiley & Sons; 2009. doi: 10.1002/9780470749784
2. Yang X. Optimization techniques and applications with examples. 1. ed. Hoboken (US): John Wiley & Sons, Inc; 2018.
3. Rao SS. Engineering optimization: Theory and practice. 4. ed. Hoboken (US): John Wiley & Sons, Ltd; 2009. doi: 10.1002/9780470549124
4. Moon SJ, Yoon GH. A newly developed qp-relaxation method for element connectivity parameterization to achieve stress-based topology optimization for geometrically nonlinear structures. Comput Methods Appl Mech Eng. 2013;265:226-41. doi: 10.1016/j.cma.2013.07.001
5. Rad MM, Habashneh M, Lógó J. Elasto-Plastic limit analysis of reliability based geometrically nonlinear bi-directional evolutionary topology optimization. Structures. 2021;34:1720-33. doi: 10.1016/j.istruc.2021.08.105
6. Han Y, Xu B, Liu Y. An efficient 137-line MATLAB code for geometrically nonlinear topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method. Struct Multidiscip Optim. 2021;63:2571-88. doi: 10.1007/s00158-020-02816-9
7. Borges JA, Amaral RR, Isoldi LA, Casas WJP, Gomes HM. A novel BESO methodology for topology optimization of reinforced concrete structures: a two-loop approach. J Appl Comput Mech. 2023;9(2):498-512. doi: 10.22055/JACM.2022.41708.3799
8. Rosinha IP, Gernaey KV, Woodley JM, Krühne U. Topology optimization for biocatalytic microreactor configurations. Comput Aided Chem Eng. 2015;37:1463-8. doi: 10.1016/B978-0-444-63577-8.50089-9
9. Gea H, Luo J. Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities. Comput Struct. 2001;79:1977-85. doi: 10.1016/S0045-7949(01)00117-1

10. Du Y, Chen L, Luo Z. Topology synthesis of geometrically nonlinear compliant mechanisms using meshless methods. *Acta Mech Solida Sin.* 2008;21:51-61. doi: 10.1007/s10338-008-0808-3
11. Bruns TE, Tortorelli DA. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2001;190:3443-59. doi: 10.1016/S0045-7825(00)00278-4
12. Lee H-A, Park G-J. Nonlinear dynamic response topology optimization using the equivalent static loads method. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2015;283:956-70. doi: 10.1016/j.cma.2014.10.015
13. Huang X, Xie YM. *Evolutionary topology optimization of continuum structures: Methods and applications.* 1. ed. Chichester (England): Wiley; 2010. doi: 10.1002/9780470689486
14. Han Y, Xu B, Duan Z, Huang X. Stress-based bi-directional evolutionary structural topology optimization considering nonlinear continuum damage. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2022;396:115086. doi: 10.1016/j.cma.2022.115086
15. Li Q, Steven GP, Xie YM. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization. *Struct Optimization.* 1999;18:67-73. doi: 10.1007/BF01210693
16. Amaral RR, Borges JA, Gomes HM. Proportional topology optimization under reliability-based constraints. *J Appl Comput Mech.* 2022;8(1):319-30. doi: 10.22055/JACM.2021.38440.3226
17. Chandrasekhar A, Suresh K. Multi-Material topology optimization using neural networks. *Computer-Aided Des.* 2021;136:103017. doi: 10.1016/j.cad.2021.103017
18. Picelli R, Sivapuram R, Xie YM. A 101-line MATLAB code for topology optimization using binary variables and integer programming. *Struct Multidiscipl Optim.* 2021;63:935-54. doi: 10.1007/s00158-020-02719-9
19. Gao J, Wang L, Luo Z, Gao L. IgaTop: An implementation of topology optimization for structures using IGA in MATLAB. *Struct Multidiscipl Optim.* 2021;64:1669-700. doi: 10.1007/s00158-021-02858-7
20. Ferrari F, Sigmund O. A new generation 99 line Matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3D. *Struct Multidiscipl Optim.* 2020;62:2211-28. doi: 10.1007/s00158-020-02629-w
21. Wang Y, Li X, Long K, Wei P. Open-source codes of topology optimization: A summary for beginners to start their research. *Comput Model Eng Sci.* 2023;137:1-34. doi: 10.32604/cmesci.2023.027603
22. Kim N-H. *Introduction to nonlinear finite element analysis.* New York (US): Springer; 2014. doi: 10.1007/978-1-4419-1746-1
23. Bonet J, Wood RD. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.* 1. ed. Cambridge (England): Cambridge University Press; 2008. doi: 10.1017/CBO9780511755446
24. Buhl T, Pedersen CBW, Sigmund O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. *Struct Multidiscipl Optim.* 2000;19:93-104. doi: 10.1007/s001580050089
25. Bendsoe MP, Sigmund O. *Topology optimization: Theory, Methods and applications.* 1. ed. Berlin: Springer-Verlag; 2004. doi: 10.1007/978-3-662-05086-6