Método alternativo para calcular a constante de Apéry

S. R. Cruz; J. B. Oliveira; D. T. Feitosa; C. M. Silva

[1]*Departamento de Matemática, Universidade de Pernambuco-Campus Petrolina, 56328-586, Petrolina-PE, Brasil*

cleomacio@ig.com.br

(Recebido em 27 de janeiro de 2011; aceito em 25 de abril de 2011)

Em 1978, Roger Apéry (1916-1994) demonstrou que o valor de $s = 3$ na função zeta de Riemann é igual a $\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,202056903\cdots$. Esse número irracional é conhecido na Matemática como constante de Apéry. A demonstração dessa constante utilizando a função zeta de Riemann é bastante trabalhosa e exige conceitos matamáticos avançados. Sendo assim, dentro desse contexto, o objetivo do presente trabalho foi apresentar um método alternativo para calcular a constante de Apéry. Para tanto, utilizou-se de conceitos elementares de Álgebra Vetorial e de Análise Matemática. Os resultados obtidos mostram que o método utilizado no presente trabalho é menos trabalhoso do que aqueles apresentados atualmente na literatura especializada.
Palavras-chave: séries, séries ímpares, séries pares.

In 1978, Roger Apéry (1916-1994) demonstrated that the value of $s = 3$ in Riemann zeta function is equal to $\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,202056903\cdots$. This irrational number is known in mathematics as Apéry's constant. The demonstration of this constant using the Riemann zeta function is laborious and requires advanced mathematical concepts. Thus, within this context, the objective of this study was to present an alternative method to calculate the Apéry constant. To this end, we used elementary concepts of vectorial algebra and mathematical analysis. The results showed that the method used in this work is less laborious than those currently presented in the literature.
Keywords: series, odd series, pairs series.

---

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento dos estudos das séries matemáticas ocorreu devido à necessidade de explicar alguns fenômenos ondulatórios. Sendo assim, diferentes tipos de séries foram descobertas. Uma série númerica $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge se a sucessão das reduzidas também chamadas de somas parciais, converge [1]. A sucessão das reduzidas é aquela cujo termo geral é $A_n = \sum_{j=1}^{n} a_n$ (reduzida de ordem n). As séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha > 1$, convergem sempre. Por outro lado, as séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha \le 1$, não convergem, e, então, diz-se que ela divergem. Para $\alpha = 1$, a série é denominada de série harmônica. Utilizando-se da análise de Fourier, é possível mostrar que: (i) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ e (ii) $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$. A série do item (i) é conhecida como série de Euler. Em 1978, Roger Apéry demonstrou que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$ resultava num número irracional, conhecido atualmente, como constante de Apéry [1]. Atualmente, a obtenção dessa constante é bastante trabalhosa, pois, as ferramentas matemáticas utilizadas exigem conhecimentos avançados de Cálculo. Sendo assim, o objetivo do presente trabalho foi desenvolver um método que facilitasse a obtenção da constante de Apéry. Segundo Aguiar et al. [2], antes de “atacar” um problema matemático, é necessário um planejamento estratégico. Baseado nisto, antes de calcular a constante de Apéry, foi necessário estabelecer as condições necessárias para a sua resolução. Para tanto, utilizou-se dos conceitos matemáticos apresentados nos trabalhos de Bassanezi e Júnior [3] e de Djairo e Neves [4], em relação aos fundamentais da Álgebra Vetorial, do Cálculo e das Variavéis Complexas.

2. FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA VETORIAL

O ângulo α formado entre dois vetores u e v, é dado por, $\cos\alpha = \dfrac{u.v}{|u|.|v|}$. Sendo assim, tem-se a seguinte equação

$$u.v = |u|.|v|.\cos\alpha \qquad (1)$$

em que u.v é o produto escalar entre os vetores u e v e $|u|, |v|$ são respectivamente os módulos dos vetores u e v. Os vetores u e v pertencem a R^n com $n \to \infty$ e n pertencendo a Z_+^*.

Suponha-se que $u = \left[1, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{n^2}, ...\right]$, com $n \to \infty$ e n pertencendo a Z_+^*, seja um vetor ∈ a R^n e que $v = \left[(1+\alpha)^0, (1+\alpha)^1, \text{L}, (1+\alpha)^{n+1}\right]$ seja um vetor ∈ a R^n com $n \to \infty$ e n pertencendo a Z_+^*. Calculando-se o módulo dos vetores u e v, tem-se:

$$|u| = \sqrt{1 + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{n^4} + ...} \qquad (2)$$

$$|v| = \sqrt{(1+\alpha)^0 + (1+\alpha)^2 + ... + (1+\alpha)^{2n-2} + ...} \quad , \qquad (3)$$

mas,

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{L} \ . \qquad (4)$$

Substituindo a expressão (4) na (2), tem-se,

$$|u| = \sqrt{\frac{\pi^4}{90}} = \frac{\sqrt{\pi^4}}{\sqrt{90}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{90}} . \qquad (5)$$

$(1+\alpha)^0 + (1+\alpha)^2 + ... + (1+\alpha)^{2n-2} + ...$ é uma série geométrica de razão $(1+\alpha)^2$. Sendo assim, tem-se:

$$(1+\alpha)^0 + (1+\alpha)^2 + ... + (1+\alpha)^{2n-2} + ... = \frac{(1+\alpha)^0}{1-(1+\alpha)^2} = \frac{1}{1-(1+\alpha)^2}, \text{ pois } (1+\alpha)^0 = 1 \ . \qquad (6)$$

Substituindo a expressão (6) na (3)

$$|v| = \sqrt{\frac{1}{1-(1+\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}} . \qquad (7)$$

Calculando-se o produto escalar entre os vetores u e v, tem-se:

$$\left[1, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{n^2}, ...\right] . \left[(1+\alpha)^0, (1+\alpha)^1, ...(1+\alpha)^{n-1} + ...\right] = u.v \ . \qquad (8)$$

Substituindo as expressões 5, 7 e 8 na equação 1, tem-se:

$$(1+\alpha)^0 + \frac{(1+\alpha)^1}{2^2} + ... + \frac{(1+\alpha)^{n-1}}{n^2} + ... = \frac{\pi^2}{\sqrt{90}} . \frac{1}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}} . \cos(\alpha) \ . \qquad (9)$$

3. FUNDAMENTOS DO CÁLCULO

Multiplicando ambos os lados da expressão (9) por $d\alpha$ e considerando as constantes de integração diferente de zero após calcular as integrais do lado esquerdo, tem-se as seguintes expressões:

$$(1+\alpha)^0 d\alpha + \frac{1}{2^2}.(1+\alpha)^1 d\alpha + ... + \frac{1}{n^2}.(1+\alpha)^{n-1} d\alpha + ... = \frac{\pi^2}{\sqrt{90}} . \frac{1\cos(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}} \ , \qquad (10)$$

$$\int (1+\alpha)^0 d\alpha + \frac{1}{2^2} \int (1+\alpha)^1 d\alpha + ... + \frac{1}{n^2} \int (1+\alpha)^{n-1} d\alpha + ... = \frac{\pi^2}{\sqrt{90}} \cdot \int \frac{1\cos(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}} \ . \qquad (11)$$

Resolvendo as integrais do lado esquerdo da expressão (11) utilizado o método da substituição, tem-se:

$$\int (1+\alpha)^0 \, d\alpha \;\Rightarrow\; \begin{matrix} u = 1+\alpha \\ du = d\alpha \end{matrix} \;\Rightarrow\; \int (1+\alpha)^0 d\alpha = \int u^0 du = \frac{u^{0+1}}{0+1} = u = (1+\alpha) \qquad (12)$$

$$\int(1+\alpha)^{1}\, d\alpha \;\Rightarrow\; u=1+\alpha \quad \Rightarrow\; \int(1+\alpha)^{1} d\alpha=\int u^{1} du=\frac{u^{2}}{2}=\frac{(1+\alpha)^{2}}{2} \tag{13}$$

$$du=d\alpha$$

$$\int(1+\alpha)^{n-1} d\alpha \Rightarrow\; u \;=\; (1+\alpha) \quad \Rightarrow\; \int u^{n-1} du=\frac{u^{n}}{n}=\frac{(1+\alpha)^{n}}{n} \tag{14}$$

$$du=d\alpha$$

Substituindo as expressões (12), (13) e (14) em (11) tem-se:

$$(1+\alpha)+k_{1}+\frac{(1+\alpha)^{2}}{2^{3}}+k_{2}+\ldots+\frac{(1+\alpha)^{n}}{n^{3}}+k_{n}+\ldots\; =\frac{\pi^{2}}{\sqrt{90}}\int\frac{1\cos(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^{2}}}\,. \tag{15}$$

Calculando a integral $\int\frac{1\cos(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^{2}}}$ utilizando a fórmula de integração por partes, tem-se:

$$\int\frac{\cos(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^{2}}} \;=\; \operatorname{arcsen}(1+\alpha).\cos(\alpha)+\int\operatorname{arcsen}(1+\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)d\alpha\,. \tag{16}$$

Pela fórmula de Mac-Laurin, tem-se:

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^{3}}{3!}+\ldots+\;(-1)^{3n-1}.\frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad . \tag{17}$$

Substituindo a expressão (17) na (16), tem-se

$$\int\operatorname{arcsen}(1+\alpha).\operatorname{sen}(\alpha)d\alpha=\int\operatorname{arcsen}(1+\alpha).\left\{\alpha-\frac{\alpha^{3}}{3!}+\ldots+\;(-1)^{3n-1}.\frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right\}d\alpha \;\;. \tag{18}$$

Calculando as integrais do lado direito da expressão (18) usando a fórmula de integração por partes tem-se:

$$\int\operatorname{arcsen}(1+\alpha)\alpha^{2n-1}d\alpha=\frac{\operatorname{arcsen}(1+\alpha)\alpha^{2n}}{2n}-\frac{1}{2n}\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^{2}}} \quad . \tag{19}$$

4. FUNDAMENTOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Na expressão (19), tem-se que, $1-(1+\alpha)^{2}=1-1-2\alpha-\alpha^{2}=-2\alpha-\alpha^{2}$. Como $-1=i^{2}$, então $-2\alpha-\alpha^{2} \;=\; -1\cdot(2\alpha+\alpha^{2})=i^{2}\cdot(2\alpha+\alpha^{2})$. Sendo assim, a integral da expressão (19) fica:

$$\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}}=\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{i^2\cdot(\alpha^2+2\alpha)}}=\frac{1}{i}\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}=$$

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}=\frac{1}{i^2}\cdot i\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}=-i\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}\qquad(20)$$

Para n=1,2 e n na expressão (20), tem-se:

n = 1

$$\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}}=-i\int\frac{\alpha^{2.1}\cdot d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}=-i\int\frac{\alpha^{2}d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}\qquad(21)$$

n = 2

$$\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}}=-i\int\frac{\alpha^{2.2}\cdot d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}=-i\int\frac{\alpha^{4}d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}\qquad(22)$$

n = n

$$\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}}=-i\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}\qquad(23)$$

Substituindo as expressões (21), (22) e (23) na (19), tem-se:

$$\int\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\alpha d\alpha=\frac{\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\alpha^2}{2}+i\int\frac{\alpha^2d\alpha}{2\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}\qquad(24)$$

$$\int\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\alpha^3d\alpha=\frac{\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\cdot\alpha^4}{4}+i\int\frac{\alpha^4d\alpha}{4\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}\qquad(25)$$

$$\int\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\alpha^{2n-1}d\alpha=\frac{\mathrm{arsen}(1+\alpha).\alpha^{2n}}{2n}+i\int\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{2n\sqrt{(\alpha^2+2\alpha)}}\qquad(26)$$

Substituindo as expressões (24), (25) e (26) na (18), tem-se:

$$\int\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\cdot\mathrm{sen}(\alpha)\cdot d\alpha=\left\{\frac{\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\alpha^2}{2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\alpha^4}{4}+....+\frac{(-1)^{3n-1}}{(2n-1)!}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\mathrm{arcsen}(1+\alpha)\alpha^{2n}}{2n}+...\right\}+i\int\frac{\alpha^2d\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}-i\int\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha^4d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}+...+i\int\frac{(-1)^{3n-1}\cdot\alpha^{2n}d\alpha}{(2n-1)!2n\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}+...\qquad(27)$$

Aplicando o somatório na expressão (27), tem-se:

$$\int \operatorname{arcsen}(1+\alpha)\cdot \operatorname{sen}(\alpha)d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcsen}(1+\alpha)\alpha^{2n}}{\left(2n\text{-}1\right)\,!\;2n}\cdot(-1)^{3n-1} + i\int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\text{-}1)^{3n\text{-}1}}{\left(2n\text{-}1\right)\,!\;2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}} \quad (28)$$

Substituindo a expressão (28) na (16), tem-se:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-(1+\alpha)^2}} &= \operatorname{arcsen}(1+\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcsen}(1+\alpha)\alpha^{2n}}{(2n-1)!2n}\cdot\left(-1\right)^{3n-1} + \\ &+ i\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\text{-}1\right)^{3n-1}}{(2n-1)\,!\;2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}\end{aligned} \quad (29)$$

Substituindo a expressão (29) na (15), tem-se:

$$\begin{aligned}&\left(1+\alpha\right)+k_1+\frac{\left(1+\alpha\right)^2}{2^3}+k_2+\ldots+\frac{(1+\alpha)^n}{n^3}+k_n+\ldots = \frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\operatorname{arcsen}\left(1+\alpha\right)\cdot\cos(\alpha)+\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot \\ &\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcsen}\left(1+\alpha\right)\alpha^{2n}}{\left(2n-1\right)\,!2n}\cdot(-1)^{3n-1}+i\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\text{-}1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)!2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}\end{aligned} \quad (30)$$

Mas,

$$\begin{aligned}&\left(1+\alpha\right)+k_1+\frac{\left(1+\alpha\right)^2}{2^3}+k_2+\ldots+\frac{(1+\alpha)^n}{n^3}+k_n+\ldots = \\ &=\left[\left(1+\alpha\right)+k_1+\frac{\left(1+\alpha\right)^2}{2^3}+k_2+\ldots+\frac{(1+\alpha)^n}{n^3}+k_n+\ldots.\right]+0.i\end{aligned} \quad (31)$$

Sendo assim, a expressão (30) fica:

$$\begin{aligned}&\left\{\left(1+\alpha\right)+k_1+\frac{\left(1+\alpha\right)^2}{2^3}+k_2+\ldots+\frac{(1+\alpha)^n}{n^3}+k_n+\ldots.\right\}+0i=\left\{\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot\operatorname{arcsen}\left(1+\alpha\right)\cdot\cos(\alpha)+\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot\right. \\ &\left.\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcsen}\left(1+\alpha\right)\alpha^{2n}}{\left(2n-1\right)!2n}\cdot(-1)^{3n-1}\right\}+i\cdot\left\{\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)\,!\;2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}\right\}\end{aligned} \quad (32)$$

Igualando-se as partes reais e imaginárias da expressão (32), tem-se:

$$\left(1+\alpha\right)+k_1+\frac{\left(1+\alpha\right)^2}{2^3}+k_2+...+\frac{(1+\alpha)^n}{n^3}+k_n+...=\left\{\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot\text{arcsen}(1+\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{arcsen}(1+\alpha)\alpha^{2n}}{\left(2n-1\right)\,!\;2n}\cdot(-1)^{3n-1}\right\} \tag{33}$$

Entretanto,

$$i.\left\{\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)!2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}\right\}=i\cdot 0 \tag{34}$$

$$\text{e}\ \ \frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)\,!\;2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}=\int\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)\,!\;2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}} \tag{35}$$

Como $0.i\ =\ i\int 0\ d\alpha$, a expressão (33) fica:

$$i\int\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\text{-}1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)\,!\;2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}=i\int 0.d\alpha \tag{36}$$

Nessas condições, tem-se:

$$\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)\,!\;2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}=0\ \ \text{e}\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)\,!2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}=\frac{0.\sqrt{90}}{\pi^2}=\frac{0}{\pi^2}=0$$

Sendo assim, temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{(2n-1)!2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}=\frac{\alpha^2}{2\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}-\frac{\alpha^4}{3!4\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}+...+\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{(2n-1)!2n}\cdot\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}+...=0\,. \tag{37}$$

Colocando-se $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}$ da expressão (37) em evidência, tem-se:

$$\left\{\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{3!.4}+...+\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{(2n-1)!.2n}\cdot\alpha^{2n}+...\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}=0$$

$$\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{3!.4}+...+\frac{\left(-1\right)^{3n-1}}{\left(2n-1\right)\,!.2n}\cdot\alpha^{2n}+...=0.\sqrt{\alpha^2+2\alpha}$$

$\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{3!.4}+...+\frac{(-1)^{3n-1}}{(2n-1)\ !.2n}\cdot\alpha^{2n}+...=0,\text{com}\frac{(-1)^{3n-1}}{(2n-1)\ !.2n}$, pertencente a Q_+^*. Portanto,

$$\alpha^2\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{3!.4}+...+\frac{(-1)^{3n-1}}{(2n-1)\ !.2n}\cdot\alpha^{2n-2}+...\right]=0 \quad (38)$$

5. CÁLCULO DA CONSTANTE DE APÉRY

De acordo com a expressão 38, tem-se $\alpha = 0$. Substituindo esse valor na expressão (33), fica:

$$(1+0)+k_1+\frac{(1+0)^2}{2^3}+k_2+...+\frac{(1+0)^n}{n^3}+k_n+...=\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\text{arcsen}(1+0).\cos(0)+$$
$$\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{arcsen}(1+0)}{(2n-1)\ !\ 2n}\cdot(0)^{2n}.(-1)^{3n-1} \quad (39)$$

Mas,

$$\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{arcsen}(1+0)}{(2n-1)!2n}\cdot(0)^{2n}\cdot(-1)^{3n-1}=0+0+0+...=0$$

e $\text{arcsen}(1+0)=\text{arcsen}(1)\cdot\cos(0)=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}$

Sendo assim, a expressão (39), fica:

$$1+k_1+\frac{(1)^2}{2^3}+k_2+...+\frac{(1)^n}{n^3}+k_n+...=\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1+0\cdot\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(-1)^{3n-1}}{(2n-1)\ !\cdot 2n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+k_1+\frac{1}{2^3}+k_2+...+\frac{1}{n^3}+k_n+...=\frac{\pi^3}{2\sqrt{90}}+0=\frac{\pi^3}{2\sqrt{90}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=-[k_1+k_2+L\ +k_n].$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^3}{2\sqrt{90}}-[k_1+k_2+L\ +k_n] \quad (40)$$

Considerando que soma das constantes de integração na expressão (40) seja uma série geométrica cujo primeiro termo é um e $k_{n+1}=\left(\frac{-71}{54}\right)^n$, com n inteiro positivo e maior ou igual a um, tem-se:

$$1+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{n^3}+...=\frac{\pi^3}{6\sqrt{10}}-\frac{54}{125}=1{,}634174268-0{,}432=1{,}202174268 \quad (41)$$

Portanto, o valor de $\frac{\pi^3}{6\sqrt{10}} - \frac{54}{125}$ na expressão (41) é aproximadamente igual a constante de Apéry.

6. CONCLUSÃO

A soma das constantes de integração que aparecem na resolução da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ pelo método alternativo apresentado, tem sempre como resultado uma série convergente, onde uma das soluções fornece a constante de Apéry.

1. FIGUEIREDO, D. G. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. 3ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009. 274p.
2. AGUIAR, A. F. A.; XAVIER, A. F. S.; RODRIGUES, J. E. M. Cálculo para ciências médicas e biológicas. Editora Harbra, São Paulo, 1988. 487p.
3. BASSANEZI, R. C.; JÚNIOR, W. C. Equações diferenciais com aplicações. Editora Harbra, São Paulo, 1988. 572p.
4. FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. Equações diferenciais aplicadas. 3ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 307p.