



Um estudo sobre grandezas constitutivas e diferença de pressões arbitrárias em uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade

A study on constitutive quantities and difference in arbitrary pressures in a particulate suspension with incompressibility constraint

D. O. Libório^{1*}; E. J. Santos²; P. L. Santana²; R. L. Pagano²; A. S. Silva³

¹Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-Sergipe, Brasil

²Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-Sergipe, Brasil

³Departamento de Matemática e Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-Sergipe, Brasil

*denisson.liborio@gmail.com

(Recebido em 15 de março de 2016; aceito em 06 de abril de 2016)

Este trabalho, no contexto de meio poroso com restrição de incompressibilidade, trata de um estudo sobre grandezas constitutivas e diferença de pressões arbitrárias em uma suspensão particulada. São usadas duas soluções exatas de um sistema de equações do movimento da suspensão particulada, com tais soluções inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta. A modelagem envolve sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, inclusive pela onda de aceleração. As soluções exatas e os movimentos da onda e das interfaces, juntamente com dados experimentais da literatura de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta, são usados para o cálculo de parâmetros envolvidos em equações propostas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão. Com isso, é determinada a diferença de pressões arbitrárias. São mostrados resultados numéricos do cálculo dos parâmetros envolvidos nas equações do modelo, usando-se como ponto de partida a determinação dos parâmetros básicos velocidade da onda de aceleração, ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e ponto de encontro das interfaces.

Palavras-chave: suspensão particulada, pressões arbitrárias, grandezas constitutivas

This work deals with porous media with incompressible constraints and is a study on constitutive quantities and difference in arbitrary pressures in a particulate suspension. In this study, two exact solutions of a system of motion equations of a particulate suspension were used. The solutions were employed in the mathematical modeling of the gravitational motion of particulate suspensions in a test tube. This modeling deals with sub-regions that vary with time and are bounded by moving interfaces and an acceleration wave. The exact solutions and the motions of waves and interfaces, along with experimental data on height versus time for the descending upper interface of the test tube, as obtained from literature, were used to calculate the parameters involved in the proposed equations for the constituent parts of the force of interaction and of each strain tensor. Thus, the difference in arbitrary pressures was determined. The numerical results of the parameters in the model equations obtained using the basic parameters of acceleration wave velocity, meeting point of the wave with the descending upper interface, and meeting point of interfaces are reported

Keywords: particulate suspension, arbitrary pressures, constitutive quantities

1. INTRODUÇÃO

O estudo do movimento de suspensões particuladas é relevante tanto do ponto de vista teórico, como em muitas situações de interesse prático [1-3]

Do ponto de vista de misturas sólido-fluido, a suspensão particulada pode ser estudada com base na teoria contínua de misturas sem reações químicas, que estabelece equações dos balanços de forma mais generalizada, inclusive a desigualdade entrópica que é importante tanto para análise de

grandezas constitutivas, como também para grandezas arbitrárias quando há algum tipo de restrição [4].

De acordo com Silva e Jesus [4], dependendo de como as grandezas constitutivas e arbitrárias são agrupadas e interpretadas, formas diferentes podem ser obtidas para sistemas de equações do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. A forma do sistema escolhido é aquela que facilita a determinação de soluções exatas, as mais simples possíveis, para serem inseridas em modelagem matemática.

Em uma dimensão, pode ser utilizada modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta ou modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta, que não é simplesmente um problema puro de sedimentação. A modelagem é mais complexa, pois envolve sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, sendo que em cada região a porosidade e as velocidades satisfazem um sistema de equações diferenciais parciais.

Neste trabalho, em uma dimensão, duas soluções exatas, de uma forma de sistema do trabalho de Silva e Jesus [4], determinadas por Libório et al. [5], são inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, uma na região de sedimentação livre e outra na região de transição. Além disso, é usada a base preliminar de informações estabelecida por Libório et al. [5].

As soluções exatas e os movimentos da onda de aceleração e das interfaces, juntamente com dados experimentais da literatura de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta, são usados para o cálculo de parâmetros envolvidos em equações propostas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão. Com isso, é determinada a diferença de pressões arbitrárias.

São mostrados resultados numéricos do cálculo dos parâmetros envolvidos nas equações do modelo, usando-se como ponto de partida a determinação dos parâmetros básicos velocidade da onda de aceleração, ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e ponto de encontro das interfaces.

2. ELEMENTOS BÁSICOS

Para uma suspensão particulada, considerada como um meio poroso saturado com fluido e modelado pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, a densidade do constituinte fluido ρ_1 e a densidade do constituinte sólido ρ_2 são dadas por

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \quad \text{e} \quad \rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s \quad (1)$$

nas quais, ρ_f e ρ_s são, respectivamente, as densidades do fluido e do sólido puros e ε é a função porosidade [4].

Em uma dimensão, as equações do movimento de uma suspensão particulada, com restrição de incompressibilidade, oriundas dos balanços de massa e quantidade de movimento linear, são expressas pelas Equações (1), com ρ_s e ρ_f constantes, e as equações relacionadas a seguir [4].

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon V_1)}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} [(1 - \varepsilon)(V_2)] = 0 \quad (2)$$

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \frac{\partial P_f}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + m + \rho_1 g_1 \quad \text{com} \quad a_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \quad (3)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \frac{\partial P_s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - m + \rho_2 g_2 \quad \text{com} \quad a_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P_{sf}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial P_{sf}}{\partial t} \quad \text{com} \quad P_{sf} = P_s - P_f \quad (5)$$

onde t é a variável tempo e y é a coordenada espacial. V_1 , V_2 , a_1 e a_2 , são, respectivamente, as velocidades e as acelerações dos constituintes fluido e sólido. P_f e P_s são pressões arbitrárias. σ_1 e σ_2 são, respectivamente, as partes constitutivas dos tensores tensão dos constituintes fluido e sólido.

m é a parte constitutiva da força de interação. As grandezas vetoriais g_1 e g_2 são as respectivas forças de campo. P_{sf} é a diferença de pressões arbitrárias que satisfaz a Equação (5) determinada pela teoria de Silva e Jesus [4].

As Equações (3), (4) e (5) fornecem a equação de interseção

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -\frac{\partial P_{sf}}{\partial y} + \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (6)$$

3. METODOLOGIA

3.1 SOLUÇÕES EXATAS

Do trabalho de Libório et al. [5] são determinadas duas soluções exatas para o sistema formado pelas Equações (1)-(6). A primeira é a solução constante caracterizada por

$$\frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad \text{e} \quad \varepsilon, V_1, V_2 \text{ e } P_{sf} \text{ constantes} \quad (7)$$

A construção da segunda solução começa com a observação de que a consideração

$$P_{sf} = P_{sf}(y, t) = P_{sf}(\varepsilon) \quad \text{com} \quad \varepsilon = \varepsilon(y, t) \quad (8)$$

satisfaz a Equação (5). Isso motiva a procura de outras soluções exatas sob as suposições

$$V_1 = V_1(y, t) = V_1(\varepsilon) \quad \text{e} \quad V_2 = V_2(y, t) = V_2(\varepsilon) \quad (9)$$

de tal modo que derivadas da porosidade e das velocidades também sejam funções da porosidade, no sentido da composição de funções expressa nas Equações (8) e (9). Dessa forma, suposições constitutivas generalizadas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão também podem ser colocadas na forma

$$m = m(y, t) = m(\varepsilon); \quad \sigma_1 = \sigma_1(y, t) = \sigma_1(\varepsilon); \quad \sigma_2 = \sigma_2(y, t) = \sigma_2(\varepsilon) \quad (10)$$

Com isso, usando como base as Equações (8)-(10), a segunda solução exata determinada por Libório et al. [5] pode ser colocada na forma

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \quad \text{e} \quad V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0) + \varphi}{\varepsilon} \quad (11)$$

$$\int A(\varepsilon) d\varepsilon = y - w_0 t + \text{constante}; \quad A(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 1 \quad (12)$$

$$G(\varepsilon)A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} - Q(\varepsilon); \quad G(\varepsilon) = \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - (\rho_s g_2 - \rho_f g_1) \quad (13)$$

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon}, \quad Q(\varepsilon) = \rho_s \left[\left(\frac{w_0 - V_2}{1-\varepsilon} \right)^2 \right] + \rho_f \left[\left(\frac{w_0 - V_1}{\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (14)$$

onde w_0 e u_0 são velocidades constantes, $A(\varepsilon)$ é uma função arbitrária da porosidade com unidade de comprimento e φ é uma constante arbitrária.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Esta parte utiliza a estrutura desenvolvida por Libório et al. [5] para o movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta (sedimentação gravitacional em proveta), caracterizado de acordo com a Figura 1.

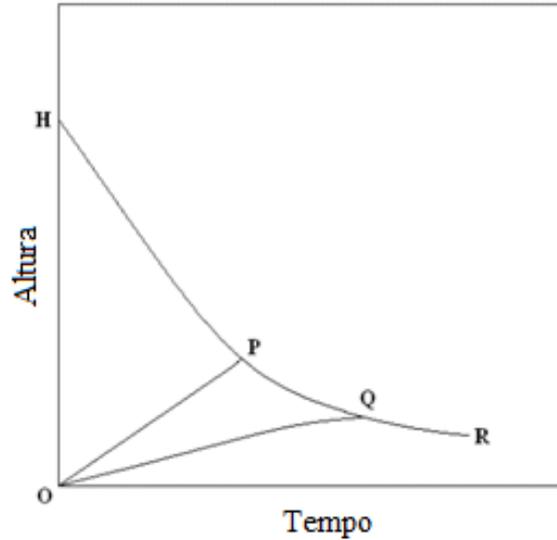


Figura 1: Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.

No gráfico da Figura 1, HPQR até a altura H corresponde à região de líquido puro, OPHO corresponde à região de sedimentação livre, OPQO corresponde à região de transição e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à região de compressão. As curvas HPQR, OP e OQ correspondem, respectivamente, às alturas da interface superior descendente, da onda de aceleração e da interface inferior ascendente. A introdução da região de transição OPQO foi motivada pelo trabalho de Kynch [6] e a revisão da sua teoria feita por Tiller [7] e estendida pelos trabalhos de Fitch [8] e Font [9]. A onda de aceleração, que não precisa ser visível, corresponde à propagação inicial da onda de concentração, a única que parte do fundo da proveta.

Em relação a cada curva do gráfico da Fig. 1, podem ser escritas as seguintes notações:

$$x = x(t) \quad (0 \leq t < \infty); \quad h = h(t) \quad (0 \leq t \leq t_0); \quad z = z(t) \quad (0 \leq t \leq t_c) \quad (15)$$

onde x é a altura da interface superior descendente, h é a altura da onda de aceleração e z é a altura da interface inferior ascendente. O tempo t_0 indica o instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração, enquanto que o tempo t_c indica o instante de encontro das duas interfaces. As alturas satisfazem as condições iniciais e as condições de encontro, respectivamente,

$$x(0) = H; \quad h(0) = z(0) = 0; \quad x(t_0) = h(t_0) \equiv x_0; \quad x(t_c) = z(t_c) \equiv x_c \quad (16)$$

nas quais H é a altura inicial da suspensão na proveta. Além disso

$$\varepsilon(y, 0) = \varepsilon_0 = \text{constante} \quad 0 \leq y \leq H; \quad g_1 = g_2 = -g \quad (17)$$

onde ε_0 é a porosidade inicial, g é a aceleração da gravidade, a coordenada espacial y está orientada para cima e $y = 0$ representa o fundo da proveta. Desse modo, das Equações (2), (13) e (17), das condições de salto e das condições de velocidades nulas no fundo da proveta

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon)V_2 = 0 \quad 0 \leq y \leq x(t); \quad G(\varepsilon) = \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + (\rho_s - \rho_f)g \quad (18)$$

3.2.1 Uso das soluções exatas

A primeira solução e a segunda solução são inseridas, respectivamente, nas regiões de sedimentação livre e de transição. Assim, das Equações (7), (11)-(18) e de Libório et al. [5]

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad V_2(y, t) = -u_0 \quad 0 < t \leq t_0; \quad G(\varepsilon_0) = 0 \quad (19)$$

para a região de sedimentação livre e

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \quad \text{e} \quad V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0)}{\varepsilon} \quad 0 < t \leq t_c \quad (20)$$

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi = w_0 t - y \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (21)$$

$$Q(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1-\varepsilon)^3} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^3} \left(\frac{w_0}{(1-\varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right] \quad (22)$$

para a região de transição, juntamente com as Equações (13) e (14).

De acordo com Libório et al. [5], da compatibilização das Equações (15), (16), (19)-(21) e das condições de salto através da onda de aceleração e da interface superior descendente

$$h = h(t) = w_0 t; \quad x = H - u_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad x_0 = w_0 t_0 \quad (23)$$

$$(u_0 + w_0)t_0 = H; \quad (u_0 + w_0)x_0 = Hw_0 \quad (24)$$

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - x \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^-} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (25)$$

$$(w_0 t - x)^2 = 2N^-(x + u_0 t - H) \quad t_0 \leq t \leq t_c; \quad N^- = N(\varepsilon^-) \quad (26)$$

para as alturas da onda de aceleração e da interface superior descendente, respectivamente, em tais intervalos, onde w_0 e u_0 são, respectivamente, as velocidades da onda de aceleração e de sedimentação livre, ε^- é a porosidade no lado inferior de tal interface e $N(\varepsilon)$ é outra função com unidade de comprimento definida por

$$2 \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \xi) A(\xi) d\xi \right) N(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi \right)^2 \quad (27)$$

As Equações (23)-(26) mostram que tudo depende dos parâmetros básicos u_0 , w_0 e do ponto (x_c, t_c) . Eles são determinados com o uso de pontos experimentais (x, t) da interface superior descendente do próprio teste de proveta, como detalhado a seguir.

A velocidade de sedimentação livre u_0 é determinada da segunda relação das Equações (23). A velocidade da onda de aceleração w_0 é o mínimo positivo da função w

$$w = \frac{u_0 x^2}{2H(H-x) - (2H-x)u_0 t} \quad \text{com} \quad 2H(H-x) - (2H-x)u_0 t > 0 \quad (28)$$

obtido pela substituição de pontos experimentais (x, t) na relação (28).

O encontro das interfaces é o ponto (x_c, t_c) onde ocorre o mínimo positivo da função W

$$W = \frac{u_0 x}{2(H-x) - u_0 t} \quad \text{com} \quad 2(H-x) - u_0 t > 0 \quad (29)$$

obtido pela substituição de pontos experimentais (x, t) na relação (29).

3.2.2 Equações propostas para as grandezas constitutivas

Para a parte constitutiva da força de interação é adotada a equação

$$m = (1 - \varepsilon)R(V_2 - V_1) \quad \text{com} \quad R = R(\varepsilon) \quad (30)$$

onde R é a resistividade. Com isso, segue das as Equações (18) e (30) que

$$m = \frac{(1-\varepsilon)RV_2}{\varepsilon} \quad (31)$$

Então, das Equações (18), (19) e (31),

$$u_0 = \frac{\varepsilon_0^2 (\rho_s - \rho_f) g}{R_0} \quad \text{com} \quad R_0 = R(\varepsilon_0) \quad (32)$$

A Equação (32) motiva a introdução de uma velocidade u dada por

$$u = u(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2(\rho_s - \rho_f)g}{R} \quad (33)$$

Dessa forma, as Equações (32) e (33) fornecem a relação

$$u = \frac{R_0}{R} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \quad (34)$$

Baseado nas Equações (32)-(34) são adotadas as seguintes equações

$$u = u_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^M \quad \text{e} \quad R = R_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{M-2} \quad (35)$$

onde M é uma constante. Além disso, as Equações (20), (32) e (33) mostram que

$$u(\varepsilon_0) = -V_2(\varepsilon_0) = u_0 \quad (36)$$

Isso sugere transferência de informações da velocidade V_2 para a velocidade u . Assim, para o cálculo de M , é adotada a condição

$$\frac{du}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = -\frac{dV_2}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) \quad (37)$$

Logo, das Equações (18), (20), (31)-(37) obtém-se que

$$M = \frac{\varepsilon_0(u_0 + w_0)}{u_0(1 - \varepsilon_0)} \quad \text{e} \quad \frac{dG}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = 0 \quad (38)$$

e as Equações (13), (19) e (38) determinam as condições

$$B(\varepsilon_0) - \frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} - Q(\varepsilon_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dB}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) - \frac{d^2P_{sf}}{d\varepsilon^2} - \frac{dQ}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = 0 \quad (39)$$

Para as partes constitutivas de cada tensor tensão são adotadas as equações

$$\sigma_1 = 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial y} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \left(\frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \right)^\beta \right); \quad \sigma_0 = \sigma_2(\varepsilon_0) \quad (40)$$

onde μ , σ_0 e β são constantes. Com isso, das Equações (12), (14), (20) e (40)

$$B(\varepsilon) = \frac{\beta(2\sigma_2 - \sigma_0)}{2(1 - \varepsilon)^2} + \frac{2\mu\tau}{\varepsilon^4} \left(\frac{\varepsilon}{A} \frac{dA}{d\varepsilon} + 2 \right) \quad \text{com} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0(u_0 + w_0) - u_0}{A} \quad (41)$$

$$\frac{dB}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{\beta(\beta+2)}{2(1 - \varepsilon)^3} (2\sigma_2 - \sigma_0) + \frac{2\mu\tau}{\varepsilon^4} \left[-\frac{8}{\varepsilon} - \frac{5}{A} \frac{dA}{d\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{A} \frac{d^2A}{d\varepsilon^2} - \frac{2\varepsilon}{A^2} \left(\frac{dA}{d\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (42)$$

3.2.3 Diferença de pressões arbitrárias

As funções comprimento $A(\varepsilon)$ e a diferença de pressões arbitrárias estão relacionadas nas Equações (13). Por serem arbitrárias, fixada uma, a outra sustenta o sistema de equações. Por isso, usando a Equação (27), podem ser estudados os casos para os quais

$$A = A(\varepsilon) = A_0 = \text{constante}; \quad N = N^- = \text{constante} = N_0 = (1 - \varepsilon_0)A_0 \quad (43)$$

$$\frac{dP_{sf}}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = \frac{2\mu\tau}{\varepsilon_0^4} - \frac{Q(\varepsilon_0)}{2}; \quad \frac{dP_{sf}^2}{d\varepsilon^2}(\varepsilon_0) = -\frac{1}{2} \frac{dQ}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) - \frac{8\mu\tau}{\varepsilon_0^5} \quad \text{com} \quad P_{sf} = P_{sf}(\varepsilon) \quad (44)$$

Então, segue das Equações (19), (22), (24), (26), para $t = t_c$, (27), (38), (40)-(44) que

$$\frac{\beta\sigma_0}{(1 - \varepsilon_0)^2} + \frac{4\mu\tau}{\varepsilon_0^4} = Q(\varepsilon_0) \quad \text{com} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0(u_0 + w_0) - u_0}{A_0} \quad (45)$$

$$\frac{\beta(\beta+2)\sigma_0}{(1 - \varepsilon_0)^3} - \frac{16\mu\tau}{\varepsilon_0^5} = \frac{dQ}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) \quad (46)$$

$$\frac{dQ}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = 3(1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1 - \varepsilon_0)^4} - \frac{\rho_f}{\varepsilon_0^4} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right] \quad (47)$$

$$x(t) = N_0 + w_0 t - \sqrt{2N_0(u_0 + w_0)t - N_0(2H - N_0)}, \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (48)$$

$$N_0 = \frac{(w_0 t_c - x_c)^2}{2(x_c + u_0 t_c - H)} \quad (49)$$

Da estrutura estabelecida acima, as Equações (13), (18), (20), (22) e (31) fornecem as relações

$$P_{sf} = I_B - I_Q - A_0 I_G + cte \quad \text{com} \quad I_B = \frac{\beta(2\sigma_2 - \sigma_0)}{2(\beta + 1)(1 - \varepsilon)} - \frac{4\mu\tau}{3\varepsilon^3} \quad (50)$$

$$I_Q = (1 - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{\rho_s}{2} \left(\frac{u_0 + w_0}{1 - \varepsilon} \right)^2 - \frac{\rho_f}{2\varepsilon^2} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right) \quad (51)$$

$$I_G = \left(R_0 \left(\frac{w_0 \varepsilon_0^{M-2}}{1 - M} \varepsilon^{1-M} - \varepsilon_0^{M-2} (u_0 + w_0) (1 - \varepsilon_0) \int \frac{1}{(1 - \varepsilon)\varepsilon^M} d\varepsilon \right) + (\rho_s - \rho_f) g \varepsilon \right) \quad (52)$$

para a diferença de pressões arbitrárias, com $M \neq 1$. Para $M = 1$

$$P_{sf} = I_B - I_Q - A_0 I_G + cte \quad \text{com} \quad I_B = \frac{\beta(2\sigma_2 - \sigma_0)}{2(\beta + 1)(1 - \varepsilon)} - \frac{4\mu\tau}{3\varepsilon^3} \quad (53)$$

$$I_Q = (1 - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{\rho_s}{2} \left(\frac{u_0 + w_0}{1 - \varepsilon} \right)^2 - \frac{\rho_f}{2\varepsilon^2} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right) \quad (54)$$

$$I_G = \left(\frac{R_0}{\varepsilon_0} \left(w_0 \ln \varepsilon - (u_0 + w_0) (1 - \varepsilon_0) \left(\ln \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \right) + (\rho_s - \rho_f) g \varepsilon \right) \quad (55)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Tabela 1 foi elaborada com base nos dados experimentais de Shannon et al. [10], com a velocidade de sedimentação livre u_0 obtida por meio da Equação (23). Ela mostra o cálculo da velocidade da onda de aceleração w_0 com base no mínimo positivo de w dado pela Equação (28), como também o ponto de encontro das interfaces (x_c, t_c) que é o ponto onde ocorre o mínimo positivo de W dado pela Equação (29).

Tabela 1: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31 \text{ cm}$, $\varepsilon_0 = 0,850$, $u_0 = 10,10 \text{ cm min}^{-1}$).

$t \text{ (min)}$	$x \text{ (cm)}$	$w \text{ (cm min}^{-1}\text{)}$	$W \text{ (cm min}^{-1}\text{)}$
0,00	31,00	-----	-----
1,25	18,19	13,86	14,14
1,50	15,76	10,27	10,38
1,75	13,52	8,14	7,90
2,00	11,01	5,85	5,62
2,25	8,75	4,56	4,06
2,50	7,26	5,94	3,30
2,75	7,12	-11,71	3,60

Fonte: Elaboração própria com os dados de Shannon et al. [10]

A Tabela 1 e as Equações (24), (43) e (49) fornecem os resultados expressos na Tabela 2.

Tabela 2: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31 \text{ cm}$, $\varepsilon_0 = 0,850$).

Sequência por linha do cálculo de A_0	
$u_0 = 10,10 \text{ cm min}^{-1}$	$w_0 = 4,56 \text{ cm min}^{-1}$
$t_0 = 2,11 \text{ min}$	$x_0 = 9,64 \text{ cm}$
$t_c = 2,50 \text{ min}$	$x_c = 7,26 \text{ cm}$
$N_0 = 5,67 \text{ cm}$	$A_0 = 37,84 \text{ cm}$

Fonte: Elaboração própria com os dados de Shannon et al. [10]

Com os dados da Tabela 2 e as Equações (23) e (48) foi elaborada a Tabela 3, que mostra a comparação da altura teórica com a experimental.

Tabela 3: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31 \text{ cm}$, $\varepsilon_0 = 0,850$, $u_0 = 10,10 \text{ cm min}^{-1}$)

$t(\text{min})$	$x(\text{cm})$ experimental	$x(\text{cm})$ teórica
0,00	31,00	31,00
1,25	18,19	18,38
1,50	15,76	15,85
1,75	13,52	13,33
2,00	11,01	10,80
2,25	8,75	8,58
2,50	7,26	7,26

Fonte: Elaboração própria com os dados de Shannon et al. [10]

Como da Tabela 3 os valores teóricos estão próximos dos experimentais, $A_0 = 37,84 \text{ cm}$ é aceito. Com isso, a função comprimento fica determinada pela Equação (43) e é fundamental para obtenção de informações dos parâmetros σ_0 e β com base nas Equações (45)-(49), cujos resultados estão expressos na Tabela 4.

Tabela 4: Suspensão aquosa de esferas de vidro ($H = 31 \text{ cm}$, $\varepsilon_0 = 0,850$, $\rho_s = 2,45 \text{ g cm}^{-3}$, $\rho_f = 1 \text{ g cm}^{-3}$, $\mu = 0,6 \text{ g cm}^{-1} \text{ min}^{-1}$)

Parâmetros
$M = 8,23$
$\beta = 0,99$
$R_0 = 365942,67 \text{ g cm}^{-3} \text{ min}^{-1}$
$\sigma_0 = 79,88 \text{ g cm}^{-1} \text{ min}^{-2}$

Fonte: Elaboração própria

Para efeito de validação, na Tabela 4, os parâmetros σ_0 e β foram determinados usando para μ o valor da viscosidade da água.

Com os dados das Tabelas 2 e 4, a diferença de pressões arbitrárias fica determinada pelas Equações (50)-(55).

Se o valor de A_0 calculado não produz a altura teórica compatível com a altura experimental, a Equação (43) não é adequada para o estudo da suspensão particulada. Neste caso, deve ser proposta outra forma de equação no lugar da Equação (43) para a função comprimento, o que implica em mudanças nas Equações (43) e (48).

5. CONCLUSÃO

Equações estabelecidas neste trabalho, juntamente com dados experimentais, coletados da literatura, de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta, mostram uma aplicação da base preliminar de informações estabelecida por Libório et al. (2015).

De fato, a base fornece elementos para o estudo de grandezas constitutivas e arbitrárias de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. Pois, a partir dela podem ser determinados parâmetros envolvidos em equações propostas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, como também para a função diferença de pressões arbitrárias.

6. NOMENCLATURA

ε	Porosidade
ρ_1	Densidade do constituinte fluido
ρ_2	Densidade do constituinte sólido
ρ_f	Massa específica do fluido puro
ρ_s	Massa específica do sólido puro
V_1	Velocidade do constituinte fluido
V_2	Velocidade do constituinte sólido
t	Variável tempo
y	Coordenada espacial
P_f	Pressão do constituinte fluido
P_s	Pressão do constituinte sólido
P_{sf}	Diferença de pressões arbitrárias
φ	Função do tempo
a_1	Aceleração do constituinte fluido
a_2	Aceleração do constituinte sólido
σ_1	Parte constitutiva do tensor tensão para o fluido
σ_2	Parte constitutiva do tensor tensão para o sólido
m	Parte constitutiva da força de interação
g_1	Força de campo sobre o fluido
g_2	Força de campo sobre o sólido
H	Altura inicial da suspensão na proveta
x	Altura da interface superior descendente
h	Altura da onda de aceleração
z	Altura da interface inferior ascendente
t_0	Instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
t_c	Instante de encontro das duas interfaces
x_0	Altura de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
x_c	Altura de encontro das duas interfaces
ε_0	Porosidade inicial
u_0	Velocidade de sedimentação livre
w_0	Velocidade da onda de aceleração
A	Função comprimento
B	Função da porosidade
Q	Função da porosidade
G	Função da porosidade
g	Aceleração da gravidade
N	Comprimento função da porosidade
w	Função velocidade
W	Função velocidade
N	Função comprimento
R	Resistividade
M	Constante adimensional
μ	Viscosidade da água
σ_0	Tensão inicial no sólido
β	Constante adimensional

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Cremasco MA. Operações unitárias em sistemas particulados e fluidomecânicos – 2ª edição. São Paulo. Blucher; 2014.
2. Hernando L, Omari A, Reungoat D. Experimental investigation of batch sedimentation of concentrated bidisperse suspensions. *Powder Technology*. 2015 May;(275) 273–279, doi: 10.1016/j.powtec.2015.01.069.
3. Tien C, Ramarao BV, Yasarla R. A blocking model of membrane filtration. *Chemical Engineering Science*. 2014 May;111: 421–431, doi: 10.1016/j.ces.2014.01.022.
4. Silva AS, Jesus E. On arbitrary quantities in a porous media with incompressibility constraint. *International Review of Chemical Engineering*. 2013 Oct;5(6): 429-434.
5. Libório DO, Santos EJ, Santana PL, Silva CF, Silva AS. Uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. *Scientia Plena*. 2015 Out;11(10) 104201-1–14, doi: 10.14808/sci.plena.2015.104202.
6. Kynch GJ. A theory of sedimentation. *Transactions of the Faraday Society*. 1952 48: 166-176, doi: 10.1039/TF9524800166.
7. Tiller FM. Revision of Kynch sedimentation theory. *AIChE Journal*. 1981 Sep;27(5): 823-829, doi: 10.1002/aic.690270517.
8. Fitch B. Kynch theory and compression zones. *AIChE Journal*. 1983 Nov;29(6): 940-947, doi: 10.1002/aic.690290611.
9. Font R. Compression zone effect in batch sedimentation. *AIChE Journal*. 1988 Feb;34(2): 229-252, doi: 10.1002/aic.690340207.
10. Shannon PT, Dehaas RD, Stroupe EP, Tory EM. Batch and continuous thickening. Prediction of batch settling behavior from initial rate data with results for rigid spheres. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 1964 Aug;3(3): 250-260, doi: 10.1021/i160011a014